Logique – Examen de Rattrapage (durée : 3 h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1 [Total = 5 points] Considérons un nouveau système logique Z basé sur le système G, mais qui contient les règles d'affaiblissement gauche et droite de LK, et qui remplace l'axiome du système G par l'axiome du système LK. Concrètement, le système Z est défini par les règles suivantes :

$$\frac{}{A \vdash A}\ (axiome)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ (\mathit{aff}\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, A}\ (\mathit{aff}\ d) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\ (\to\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to\ d) \qquad \frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}(\vee d)$$

1. Donner deux dérivations différentes du séquent $(p \wedge q) \wedge (q \to r) \vdash (q \wedge r) \vee r$ dans le système Z.
2. Soit A une formule propositionnelle quelconque. Prouver que le séquent $p, (p \to q) \vdash A \to (p \vee q)$ est dérivable dans Z.
3. Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable dans G, alors il est aussi dérivable dans Z. Raisonner par induction sur la dérivation dans G (les règles du système G sont données dans l'appendice).
4. Est-ce que le système Z est complet (*i.e.* est-ce que toute formule valide est dérivable dans Z) ? Justifiez.

Exercice 2 [Total = 4 points] On considère un langage du premier ordre où $\Sigma_P = \{o/1, p/1, q/1, r/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat. Considérons les formules suivantes :

H_1 : $\exists x_0.o(x_0)$

H_2 : $\forall x_2.[p(x_2) \to \forall x_1.r(x_1, x_2)]$

H_3 : $\forall x_3.\forall x_4.[\neg(o(x_3) \to \neg q(x_4)) \to \neg r(x_3, x_4)]$

H_4 : $\neg\forall x_5.[\neg p(x_5) \vee \neg q(x_5)]$

1. Donner un ensemble de *clauses* C équivalent à $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.
2. Montrer que l'ensemble C est insatisfaisable par la méthode de résolution.

Exercice 3 [Total = 3 points] Soit Σ l'alphabet $\{a/0, b/0, g/1, h/2, f/3\}$. Donner un problème d'unification de la forme $\mathcal{P} = \{t_1 \doteq t_2\}$ sur l'alphabet Σ tel que

- t_1 et t_2 soient unifiables et,
- l'application de l'algorithme vu en cours trouve un unificateur principal de $\mathcal{P}$ en utilisant <u>exactement deux fois</u> chaque règle d'unification (qui sont données dans l'appendice).

1. Expliciter tous les pas nécessaires pour trouver l'unificateur le plus général de $\mathcal{P}$.
2. Quel est l'unificateur obtenu ?
3. Vérifier que la substitution obtenue dans le point précédent est bien un unificateur du problème $\mathcal{P}$.

Exercice 4 [Total = 5 points] Considérons un langage du premier ordre où $\Sigma_F = \{b/0, f/1\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{q/1, r/2, p/3\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat. On considère une interprétation I, ayant comme domaine l'ensemble $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, comme interprétation de Σ_F les fonctions suivantes :

$$\mathcal{I}_F(b) = 2 \quad \mathcal{I}_F(f) = \{(2,3), (3,4), (4,5)\}$$

et comme interprétation de Σ_P les prédicats suivants :

$$\mathcal{I}_P(q) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \mathcal{I}_P(r) = \{(2,2)\} \quad \mathcal{I}_P(p) = \{(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5)\}$$

Pour chaque (pré) formule F_i ci-dessous, on veut remplacer <u>chaque</u> occurrence d'une boite $\boxed{\quad ? \quad}$ par un **atome**, afin de construire une nouvelle formule G_i telle que (1) G_i soit close et (2) l'interprétation I ci-dessus falsifie G_i. Construire G_i ($1 \leq i \leq 5$) et justifiez chacune de vos réponses.

1. $F_1 = (\forall x.\forall y.\boxed{\quad ? \quad}) \wedge (\exists z.\boxed{\quad ? \quad})$
2. $F_2 = (\exists x.\boxed{\quad ? \quad}) \vee (\forall y.\forall z.\boxed{\quad ? \quad})$
3. $F_3 = (\forall x.\forall y.\boxed{\quad ? \quad}) \rightarrow \boxed{\quad ? \quad}$
4. $F_4 = \forall x.(q(x) \rightarrow \boxed{\quad ? \quad})$
5. $F_5 = \exists x.\neg(\boxed{\quad ? \quad} \wedge \boxed{\quad ? \quad})$

Exercice 5 [Total = 3 points] Formaliser les raisonnements suivants (qui ne sont pas forcément valides) en calcul des prédicats en donnant une seule formule par item :

1. Si quelqu'un peut obtenir un prix, alors il y a un bon sportif qui le peut. Marc est un bon sportif qui ne peut pas obtenir de prix. Donc personne ne peut obtenir de prix.
2. Tous les camarades de Pierre sont musclés. L'un de ses camarades est fatigués. Aucune personne fatiguée ne peut être musclée. Donc tous les camarades de Pierre peuvent obtenir un prix.

On utilisera uniquement le symbole de fonction d'arité 0 « marc » pour indiquer l'individu Marc et les symboles de prédicats unaires (d'arité 1) suivants :

- $C(x)$ pour exprimer « x est un camarade de Pierre »
- $M(x)$ pour exprimer « x est musclé »
- $F(x)$ pour exprimer « x est fatigué »
- $P(x)$ pour exprimer « x peut obtenir un prix »
- $S(x)$ pour exprimer « x est un bon sportif »

Appendice

Système $\mathcal{G}$ pour le calcul propositionnel

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A}\ (ax)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg d) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\ (\to g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \quad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Règles d'unification

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}}\ (\text{orienter}) \quad \frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}}\ (\text{décomposer})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}}\ (\text{effacer}) \quad \frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}}\ (\text{remplacer})$$

Règles de résolution

Axiomes :

$$\frac{}{C}\ (C \in \Delta,\ \text{où } \Delta \text{ est l'ensemble de clauses}).$$

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee C)}\ (coupure)$$

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \vee r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee r(s_1, \ldots, s_n))}\ (fact) \quad \frac{D \vee \neg r(s_1, \ldots, s_n) \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee \neg r(s_1, \ldots, s_n))}\ (fact)$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ et les clauses C et D ne partagent pas de variables.