# Logique – Partiel (durée : 3 h)

*Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles.*
*Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.*
**Rédiger chaque exercice dans une feuille indépendante**

## Exercice 1 (Calcul des prédicats)

1. Dire si les formules suivantes sont dans la syntaxe du calcul des prédicats en justifiant vos réponses (une réponse sans justification sera considérée comme nulle). En particulier spécifier l'ensemble des variables, les symboles de fonction, les symboles de prédicat, ainsi que leurs arités.

   (a) $\forall x.\forall y.\ ((s(a,b,x) \wedge p(y)) \rightarrow s(x,y))$
   (b) $\exists x.(r(x,x) \vee \forall p.\forall y.\ p(y))$
   (c) $(\forall x.\ p(f(x))) \wedge (p(p(x)))$
   (d) $\exists x. \rightarrow (p(f(x)) \wedge r(x,y))$
   (e) $p(f(a)) \vee \forall a.\ p(a)$
   (f) $(p(a) \wedge p(f(a))) \vee a$

2. Soit $A$ la formule $\exists y.(\forall x.(\exists y.p(x,y) \vee q(x)) \wedge p(z,x))$. Parmi les formules suivantes, quelles sont celles qui s'obtiennent par un renommage de $A$ ? Justifier.

   $A_1 : \exists y_1.(\forall x.(\exists y.p(x,y_1) \vee q(x)) \wedge p(z,x))$
   $A_2 : \exists y.(\forall x_1.(\exists y.p(x,y) \vee q(x)) \wedge p(z,x_1))$
   $A_3 : \exists y.(\forall x_1.(\exists y.p(x_1,y) \vee q(x)) \wedge p(z,x))$
   $A_4 : \exists y_1.(\forall x.(\exists y_1.p(x,y_1) \vee q(x)) \wedge p(z,x))$
   $A_5 : \exists y.(\forall x_1.(\exists y.p(x_1,y) \vee q(x)) \wedge p(z,x_1))$
   $A_6 : \exists y_1.(\forall x.(\exists y.p(x,y) \vee q(x)) \wedge p(y_1,x))$

3. On considère un langage où les termes sont construits sur l'ensemble des symboles de fonction $\Sigma_F = \{f/1, g/1\}$. Montrer que tout terme du langage possède exactement une occurrence de variable : pour tout terme $t \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $\texttt{NbVar}(t) = 1$, où $\texttt{NbVar}(t)$ désigne le nombre de variables du terme $t$. Raisonner par induction structurelle sur $t$.

4. On considère un langage du premier ordre $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{c/0, g/2\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{r/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicats. On considère les trois formules closes suivantes :

$$F_1 : \forall y.r(g(y,c),y)$$
$$F_2 : \forall x.\exists y.r(g(y,y),x)$$
$$F_3 : \exists x.\exists y.\neg r(x,c) \wedge \neg r(y,c) \wedge r(g(x,y),c)$$

   Pour chaque formule $F_i$ ($i \in \{1,2,3\}$), préciser si elle est satisfaisable ou pas dans les interprétations suivantes :

   (a) Le domaine est $\mathbb{Z}$, $\mathcal{I}(g)(a,b) = a \times b$, $\mathcal{I}(c) = 1$ et $\mathcal{I}(r) = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.
   (b) Le domaine est $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}(g)(a,b) = a \times b$, $\mathcal{I}(c) = 0$ et $\mathcal{I}(r) = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
   (c) Le domaine est $\mathbb{Z}/5 = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{I}(g)(a,b) = (a+b) \bmod 5$ , $\mathcal{I}(c) = 0$ et $\mathcal{I}(r) = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}/5\}$. On vous rappelle que $n \bmod m = r$ si il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = p \cdot m + r$ avec $|r| < |m|$ (ainsi par exemple $17 \bmod 3 = 2$).

Justifier vos réponses en donnant le détail de tous les calculs nécessaires pour affirmer que la formule est satisfaisable ou pas dans l'interprétation en question.

**Exercice 2 (Résolution)**

1. Un explorateur se retrouve par téléportation dans une pièce comportant 4 portes fermées situées respectivement à l'ouest, à l'est, au sud et au nord.

   Une voix lui dit :

   « Chaque porte mène soit vers un trésor soit vers un monstre qui te dévorera. De plus, les quatre faits suivant sont vrais :

   (a) Si la porte à l'est mène à un trésor, la porte à l'ouest aussi.

   (b) Il y a un trésor au nord ou au sud mais pas dans les deux.

   (c) S'il y a un trésor au sud et pas à l'est, il y en a une à l'ouest.

   (d) Il n'y a pas de trésor à l'ouest »

   L'explorateur pense qu'il y a donc un trésor au nord.

   Il s'agit de montrer que l'explorateur a raison à partir de l'ensemble des informations dont il dispose. Modéliser le problème en notant $n$ « il y a un trésor au nord », $e$ « il y a un trésor à l'est », $o$ « il y a un trésor à l'ouest » et $s$ « il y a un trésor au sud ».

   (a) Montrer que l'explorateur a raison en donnant une dérivation dans le système $\mathcal{G}$.

   (b) Montrer que l'explorateur a raison à l'aide de l'algorithme de résolution.

2. Un ensemble de clauses $\Gamma$ est *saturé* si à chaque fois que $\Gamma \vdash_R A$, alors $A \in \Gamma$. L'ensemble *saturé de base* $\Delta$ est le plus petit ensemble saturé $\Delta^\circ$ tel que $\Delta \subseteq \Delta^\circ$. On propose l'algorithme suivant (qu'on admettra correct sans le démontrer) pour calculer l'ensemble saturé de base $\Delta$.

   (a) $\Gamma := \Delta$

   (b) Essayer d'obtenir une *nouvelle* clause $C$ (*i.e.* $C \notin \Gamma$) en appliquant une seule règle de résolution sur l'ensemble $\Gamma$ (règle de coupure ou de factorisation). Si cela n'est pas possible aller directement au point (e).

   (c) $\Gamma := \Gamma \cup \{C\}$

   (d) Aller au point (b).

   (e) Fin.

   - Calculer l'ensemble saturé de base $\Delta = \{\neg q \vee p, q \vee p, p \vee \neg p\}$.
   - En déduire que $\Delta$ n'est pas réfutable, c'est à dire, que $\Delta \nvdash_R \texttt{False}$.

3. Soit $\Delta$ un ensemble de clauses qui ne contient pas la clause vide `False`. Supposons également que les clauses de $\Delta$ n'ont aucune occurrence du connecteur $\neg$. Donner une explications en quelques lignes permettant de justifier que $\Delta$ n'est pas réfutable.

**Exercice 3 (Preuves par induction)**

Dans cet exercice on se place dans le contexte du systeme $\mathcal{G}$ propositionnel, dont les règles sont rappelées dans la figure 1.

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A}\ (ax)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\ (\to\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

FIGURE 1 – Les règles du système $\mathcal{G}$ pour le calcul propositionnel

On considère un nouveau système que l'on appelle $\mathcal{N}$ qui contient toutes les règles dans la figure 1 plus les deux nouvelles règles suivantes :

$$\frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma \quad \Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \leftrightarrow B \vdash \Gamma}\ (\leftrightarrow\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma \quad \Delta, B \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \leftrightarrow B, \Gamma}\ (\leftrightarrow\ d)$$

On écrit $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \Gamma$ pour une dérivation dans le système $\mathcal{N}$ ayant comme conclusion/racine le séquent $\Delta \vdash \Gamma$.

1. Donner une dérivation dans le système $\mathcal{N}$ du séquent suivant :
   $(\neg p \vee q) \leftrightarrow r \vdash r \leftrightarrow (p \to q)$.
2. Soit $\mathcal{FB}_{\leftrightarrow}$ la fonction booléenne associée au connecteur $\leftrightarrow$ et définie par :

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \mathcal{FB}_{\leftrightarrow}(\mathbf{V},\mathbf{V}) & = & \mathbf{V} & \mathcal{FB}_{\leftrightarrow}(\mathbf{F},\mathbf{F}) & = & \mathbf{V} \\ \mathcal{FB}_{\leftrightarrow}(\mathbf{V},\mathbf{F}) & = & \mathbf{F} & \mathcal{FB}_{\leftrightarrow}(\mathbf{F},\mathbf{V}) & = & \mathbf{F} \end{array}$$

   On définit la formule suivante : $C_{A,B} \stackrel{def}{=} (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.
   Après avoir rappelé la définition de l'équivalence logique $\equiv$, montrer que $C_{A,B} \equiv A \leftrightarrow B$ (il est possible d'utiliser les tables de verité).

On se propose maintenant de transformer toute dérivation de $\mathcal{N}$ dans une dérivation de $\mathcal{G}$ équivalente. Il nous faut donc

- *éliminer* le connecteur $\leftrightarrow$ en utilisant la formule $C_{A,B}$ de la question précédente
- *éliminer* les règles $(\leftrightarrow\ g)$ et $(\leftrightarrow\ d)$ du nouveau système.

3. On commence par transformer une dérivation de $\mathcal{N}$ lorsqu'elle *se termine* par la règle $(\leftrightarrow\ g)$ ou par la règle $(\leftrightarrow\ d)$. Plus précisément,

   (a) Si la dérivation se termine par $(\leftrightarrow\ g)$ : étant données une dérivation $\pi_1$ de conclusion $\Delta' \vdash A, B, \Gamma'$ et une dérivation $\pi_2$ de conclusion $\Delta', A, B \vdash \Gamma'$, toutes les deux dans le système $\mathcal{G}$, construire une dérivation de $\Delta', C_{A,B} \vdash \Gamma'$ qui utilise uniquement les règles du système $\mathcal{G}$. On supposera qu'il n'y a aucune occurrence du connecteur $\leftrightarrow$ dans les multiensembles $\Delta'$ et $\Gamma'$ et dans les formules $A$ et $B$.

   (b) Appliquer la méthode ainsi obtenue à la dérivation suivante (commencer par déterminer $\Delta'$, $\Gamma'$, $A$ et $B$).

$$
\dfrac{\dfrac{}{s \vdash s, (q \vee r) \wedge q, q \vee r}\,(ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{s, s, q \vee r, q \vdash q \vee r}\,(ax)}{s, s, (q \vee r) \wedge q \vdash q \vee r}\,(\wedge\ g)}{s, s \leftrightarrow ((q \vee r) \wedge q) \vdash q \vee r}\,(\leftrightarrow\ g)
$$

   On *admettra* un raisonnement similaire lorsque la dérivation se termine par $(\leftrightarrow\ d)$ : étant données une dérivation $\pi_1$ de conclusion $\Delta', A \vdash B, \Gamma'$ et une dérivation $\pi_2$ de conclusion $\Delta', B \vdash A, \Gamma'$, toutes les deux dans le système $\mathcal{G}$, on admettra que l'on sait construire une dérivation de $\Delta' \vdash C_{A,B}, \Gamma'$ qui utilise uniquement les règles du système $\mathcal{G}$. On supposera qu'il n'y a aucune occurrence du connecteur $\leftrightarrow$ dans les multiensembles $\Delta'$ et $\Gamma'$ et dans les formules $A$ et $B$.

4. Le point précédent décrit une transformation seulement pour les dérivations qui *se terminent* par l'application d'une règle $(\leftrightarrow\ g)$ ou $(\leftrightarrow\ d)$. Expliquer comment on peut étendre cette transformation à n'importe quelle dérivation de $\mathcal{N}$, c'est à dire, donner un algorithme qui prend en entrée une dérivation dans $\mathcal{N}$ et qui renvoie en sortie une dérivation équivalente dans $\mathcal{G}$.

5. Formaliser votre raisonnement en montrant que pour *toute* dérivation $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \Gamma$ dans le système $\mathcal{N}$ il existe une dérivation $\Delta' \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma'$ dans le système $\mathcal{G}$, où $\Delta'$ (resp. $\Gamma'$) est un multi-ensemble équivalent à $\Delta$ (resp. $\Gamma$) mais sans aucune occurrence du connecteur $\leftrightarrow$. Pour cela, raisonner par induction sur la structure de la dérivation $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \Gamma$ en séparant le cas de base des cas inductifs, et en énonçant clairement l'hypothèse d'induction quand elle est utilisée.