Université Paris Diderot – L3 Informatique 18 Mai 2016

Examen final (durée : 3h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1 [Unification (5 points)] Nous rappelons les règles de l'algorithme d'unification vu en cours dans l'appendice.

1. Donner un unificateur principal du problème $\mathcal{P} = \{p(y, x, h(y)) \doteq p(g(a, z), f(z), x')\}$, où les symboles x, x', y, z sont des variables.
2. Donner un unificateur du même problème $\mathcal{P}$ qui ne soit pas un unificateur principal.
3. Considérons les problèmes d'unification $\mathcal{P}_n = \{x_1 \doteq f(x_2), \ldots, x_n \doteq f(x_{n+1})\}$, où $n \geq 1$.
   (a) Donner un unificateur principal du problème $\mathcal{P}_3$.
   (b) Vérifier que la substitution obtenue dans le point précédent est bien un unificateur du problème $\mathcal{P}_3$.
   (c) Comme d'habitude, on utilise la notation $\{x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k\}$ $(k \geq 0)$ pour décrire la forme explicite d'une substitution. Donner la forme explicite de l'unificateur principal du problème $\mathcal{P}_n$ dans le cas général.
4. Exhiber un problème d'unification $\mathcal{P}$ tel que l'application de l'algorithme vu en cours trouve un unificateur principal en utilisant exactement deux fois la règle décomposer, deux fois la règle remplacer, une fois la règle effacer et aucune fois la règle orienter.

Exercice 2 [Résolution (5 points)] Considérons les quatre formules suivantes, où les symboles de fonction sont $\{a/0, d/0, f/2\}$ et le seul symbole de prédicat est $\{p/1\}$.

F_1 : $p(a)$.

F_2 : $\forall x_1\ \exists x_2\ p(x_2)$.

F_3 : $\forall x_3\ p(x_3) \rightarrow p(f(d, x_3))$.

F_4 : $\exists x_4\ p(f(d, f(d, f(d, x_4))))$.

En utilisant la méthode de résolution (voir les règles dans l'appendice), montrer que F_4 est une conséquence logique de l'ensemble de formules $\{F_1, F_2, F_3\}$.

Exercice 3 [Gentzen (3 points)] On considère un langage du premier ordre, où $p/1, q/1, r/2$ sont des symboles de prédicat. Démontrer que la formule suivante est valide en utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats (les règles sont rappelées dans l'appendice).

$$[(\exists y.\forall x.r(x, y)) \wedge \neg q(a)] \rightarrow [(\forall x.\exists y.r(x, y)) \wedge \neg\forall x\ q(x)]$$

deux quantif ∃ → 1er renommage
deux quantif ∀

Exercice 4 [Forme prénexe (3 points)]

1. Donner une forme prénexe pour $(\exists z\, r(x,z) \vee \forall z\, q(z,z)) \wedge (\exists x\, p(x) \to q(y,y)) \wedge \neg \forall x\, p(x)$.
2. Soit Σ une signature et $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. Soit $\mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ l'ensemble de tous les *atomes* sur Σ et $\mathcal{X}$, et rappelons la définition de l'ensemble de *formules du calcul des prédicats* sur Σ et $\mathcal{X}$:

$$\frac{p(t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{p(t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{\neg A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}}{\forall x. A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}}{\exists x. A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

$$\frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \to B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \vee B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \wedge B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

   Montrer par induction que toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une forme prénexe.

Exercice 5 [Skolemisation (4 points)]

1. Donner une formule A, ainsi qu'une formule B obtenue par skolemisation à partir de A, telles que $A \equiv B$.
2. Donner une formule A, ainsi qu'une formule B obtenue par skolemisation à partir de A, telles que $A \not\equiv B$. Justifier formellement la non-équivalence.
3. Donner une formule A, ainsi qu'une formule B obtenue par skolemisation à partir de A, telles que la skolemisation introduit exactement deux symboles de fonction f et g, d'arité 3 et 4 respectivement.

Capture des variables

$\exists y\ p(x,y)\ \{x|y\} = \exists y'\ p(y,y')$

Appendice

Règles d'unification

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}}\ \text{(orienter)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1,\ldots,s_n) \doteq f(t_1,\ldots,t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1,\ldots,s_n \doteq t_n\}}\ \text{(décomposer)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}}\ \text{(effacer)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}}\ \text{(remplacer)}$$

Règles de résolution

Axiomes :

$$\frac{}{C}\ (C \in \Delta,\ \text{où } \Delta \text{ est l'ensemble de clauses}).$$

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1,\ldots,s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma(D \vee C)}\ (coupure)$$

$$\frac{D \vee r(s_1,\ldots,s_n) \vee r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma(D \vee r(s_1,\ldots,s_n))}\ (fact) \qquad \frac{D \vee \neg r(s_1,\ldots,s_n) \vee \neg r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma(D \vee \neg r(s_1,\ldots,s_n))}\ (fact)$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1,\ldots,s_n \doteq t_n\}$ et les clauses C et D ne partagent pas de variables.

Système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A}\ (ax)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg d) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\ (\to g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \qquad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \quad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

$$\frac{\Delta, \{x \leftarrow t\}(A), \forall x.A \vdash \Gamma}{\Delta, \forall x.A \vdash \Gamma}\ (\forall g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash \forall x.A, \Gamma}\ (\forall d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta, \exists x.A \vdash \Gamma}\ (\exists g) \quad \frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A), \exists x.A, \Gamma}{\Delta \vdash \exists x.A, \Gamma}\ (\exists d)$$

Dans les règles $(\forall\ d)$ et $(\exists\ g)$ x n'est libre ni dans Δ ni dans Γ ; dans les règles $(\forall\ g)$ et $(\exists\ d)$ l'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas de variables (aucune variable de t devient liée).