Logique – Examen final

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif et pourrait être modifié.

Exercice 1 [Résolution (3 points)] Montrer que la formule $\exists x.\ (q(x) \to \forall y.\ q(y))$ est valide en utilisant la méthode de la résolution.

Exercice 2 [Sémantique et forme clausale (3 points)] On considère l'ensemble de variables $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ et la signature Σ avec $\Sigma_F = \{\}$ (pas de fonctions) et $\Sigma_P = \{grandparent/2, parent/2\}$. On considère la formule A donnée par :

$$\forall x\, \forall y\, (grandparent(x, y) \to (\exists z\, (parent(x, z) \wedge parent(z, y))))$$

- Montrer que A a un modèle en donnant une interprétation $\mathcal{I}$ qui la rend vraie pour n'importe quelle assignation σ, c.-à-d. $[A]_{\mathcal{I},\sigma} = V$. Indication : Il suffit de donner ici un domaine $\mathcal{D}$ et une interprétation des deux prédicats $grandparent/2$ et $parent/2$ adéquats.
- Mettre A en forme clausale (un ensemble de clauses C_A).
- Donner une interprétation qui est un modèle de C_A. Indication : Ici, il peut y avoir des fonctions !

Exercice 3 [Résolution (3 points)] Montrer que l'ensemble de clauses suivant est réfutable en utilisant la résolution (u, v, w, x, y, z sont des variables, a, b, c, d des constantes, f, g des symboles de fonction d'arité 1, et p, q, r, s des symboles de prédicats).

$$\{\neg p(x, f(y)) \vee \neg q(y, a) \vee r(x), q(g(b), w) \vee s(w), \neg s(d), p(c, u), \neg r(v) \vee s(d), \neg s(z)\}$$

Exercice 4 [Unification (3 points)] Pour les problèmes d'unification suivants donner un unificateur principal s'il existe, ou indiquer qu'il n'y en a pas. v, x, y, z sont des variables, et a, b des constantes. Détailler l'application de l'algorithme d'unification pour chaque problème.

1. $p(a, x) \doteq p(z, f(z))$
2. $f(g(x), f(y), a) \doteq f(y, f(b), a)$
3. $f(x, y, z) \doteq f(g(v, v), g(x, x), g(y, y))$

Exercice 5 [Gentzen (3 points)] On considère un langage du premier ordre, où $p/1$ et $q/1$ sont des symboles de prédicat. En utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats, démontrer que les formules suivantes sont valides. Rappel : pour montrer que A est valide on montre que le séquent $\vdash A$ est prouvable.

1. $(\exists x.\ (p(x) \to q(x))) \to ((\forall x.\ p(x)) \to \exists x.\ q(x))$
2. $((\forall x.\ q(x)) \vee (\forall y.\ p(y))) \to (\forall z.\ (p(z) \vee q(z)))$
3. $\exists x.\ (q(x) \to \forall y.\ q(y))$

Exercice 6 [Sémantique (3 points)] On considère une signature Σ avec $\Sigma_F = \{a/0, b/0, f/2, h/1\}$ et $\Sigma_P = \{p/1, r/2\}$. Soit l'interprétation $\mathcal{I}$ donnée par le domaine $D = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{I}(a) = 0$, $\mathcal{I}(b) = 2$, $\mathcal{I}(f)(x, y) = x + y$, si $x + y \leq 2$, sinon $\mathcal{I}(f)(x, y) = 1$, $\mathcal{I}(h)(x) = x - 1$, si $x \geq 1$, sinon $\mathcal{I}(h)(x) = 2$, $\mathcal{I}(p)(x) = \{0, 2\}$ et $\mathcal{I}(r) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.

Indiquer si $\mathcal{I}$ est un modèle pour les formules suivantes. **Justifier** vos réponses.

1. $r(a, h(b))$
2. $\forall x.\ (r(x, x) \vee p(x))$
3. $\exists x.\ (p(x) \wedge r(f(x, x), x))$
4. $\forall x.\ \forall y.\ (r(x, h(y)) \to p(f(x, y)))$

$\mathcal{I}$ n'est pas un modèle de la formule $\exists y.\ \forall x.\ r(h(x), f(x, y))$. Modifier $\mathcal{I}$ pour que $\mathcal{I}$ devienne un modèle.

Exercice 7 [Modélisation et preuve (5 points)] Formaliser les phrases suivantes en calcul des prédicats (commencer en donnant les prédicats utilisés) :

1. Chaque chapeau est blanc ou noir (Each cap is white or black).
2. Chaque homme a un chapeau qui lui appartient (Each man has a cap which belongs to him).
3. Rien n'appartient à Angelina et Brad en même temps (Nothing belongs to both Angelina and Brad).
4. Tous les chapeaux noirs appartiennent à Angelina (All black caps belong to Angelina).
5. Si Brad est un homme, alors il y a un chapeau blanc (If Brad is a man, then ~~all caps are black~~). there is a white cap)

Indication : Angelina et Brad peuvent être modélisés comme des constantes (a et b).

Bonus : Montrer avec la méthode de votre choix que 5. est conséquence logique de 1. à 4.