Université Paris Diderot – L3 Informatique 21 Juin 2012

Logique – Examen de rattrapage

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif et pourrait être modifié.

Exercice 1 [Modélisation et preuve (6 points)] Formaliser les phrases suivantes en calcul des prédicats (Commencer en donnant les prédicats utilisés) :

1. Chaque coyote chasse un géocoucou.
2. Chaque géocoucou qui dit "beep-beep" est intelligent.
3. Aucun coyote n'attrape un géocoucou intelligent.
4. Tout coyote qui chasse un géocoucou mais qui ne l'attrape pas est frustré.
5. Si tous les géocoucous disent " beep-beep", alors tous les coyotes sont frustrés.

Montrer ensuite formellement avec la méthode de votre choix que 5. est une conséquence logique de 1. à 4.

Exercice 2 [Unification (3 points)] Pour les problèmes d'unification suivants donner un unificateur principal s'il existe, ou indiquer qu'il n'y en a pas. u, x, y, z sont des variables, et a, b, c des constantes. Détailler l'application de l'algorithme d'unification (jusqu'à sa fin) pour chaque problème.

1. $r(u, f(a, g(b)), x) \doteq r(y, f(z, y), y)$
2. $q(y, y, x, x) \doteq q(a, z, z, b)$
3. $p(f(y), y, c) \doteq p(z, c, x)$

Exercice 3 [Résolution (4 points)] Montrer en utilisant la résolution que l'ensemble de clauses suivant est contradictoire (x, y, z, u, v sont des variables, c, d des constantes, s, f, g des symboles de fonction d'arité 1 et p, q, r des symboles de prédicats) :

$$\{\neg r(v),\quad r(x) \vee \neg q(x, s(y)) \vee p(f(y), x),\quad q(g(z), s(s(u))) \vee \neg p(f(u), z),\quad q(c, s(d)),\quad \neg p(f(s(d)), g(c))\}$$

Exercice 4 [Gentzen (3 points)] On considère un langage du premier ordre, où $m/0$, $r/0$, $p/2$, $p_1/1$ et $q/1$ sont des symboles de prédicat. En utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats, démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $r \rightarrow (m \rightarrow (r \wedge m))$
2. $(r \rightarrow m) \rightarrow ((r \rightarrow \neg m) \rightarrow \neg r)$
3. $(\exists x\ \exists y\ p(x, y)) \rightarrow (\exists y\ \exists x\ p(x, y))$
4. $(\forall x\ (p_1(x))) \rightarrow (\forall x\ (p_1(x) \vee q(x)))$
5. $(\exists y\ \forall x\ p(x, y)) \rightarrow (\forall x\ \exists y\ p(x, y))$

Exercice 5 [Sémantique (1 points)] Donner une interprétation qui n'est pas modèle de la formule :

$$(\forall x\ \exists y\ p(x, y)) \rightarrow (\exists y\ \forall x\ p(x, y))$$

Exercice 6 [Sémantique (3 points)] On considère une signature Σ avec $\Sigma_F = \{c/0, d/0, g/2, f/1\}$ et $\Sigma_P = \{p/1, r/3\}$. Soit l'interprétation $\mathcal{I}$ donnée par le domaine $D = \{2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{I}(c) = 5$, $\mathcal{I}(d) = 2$, $\mathcal{I}(g)(x, y) = max(x, y)$ (max rend le maximum des deux arguments), $\mathcal{I}(f)(x) = x$, $\mathcal{I}(p) = \{3, 4\}$ et $\mathcal{I}(r) = \{(2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 3, 2), (4, 5, 3), (4, 2, 5), (5, 2, 3), (3, 3, 3)\}$.

Indiquer si $\mathcal{I}$ est un modèle pour les formules suivantes. Justifier (d'une façon informelle) vos réponses.

1. $\forall x\ p(x)$
2. $\exists x\ r(x, d, f(c))$
3. $\exists x\ \neg r(x, d, f(c))$
4. $\forall x\ p(x) \rightarrow p(g(x, f(x)))$
5. $\forall x\ \forall y\ \exists z\ ((p(x) \wedge r(x, y, z)) \rightarrow p(g(x, z)))$