

Logique – Examen final

*Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif et pourrait être modifié.*

Exercice 1 [Modélisation et preuve (5 points)] Formaliser les phrases suivantes en calcul des prédicats (Commencer en donnant les prédicats utilisés) :

1. Chaque oiseau dort dans un arbre.
2. Chaque plongeon est un oiseau, et chaque plongeon est aquatique.
3. Chaque arbre dans lequel un oiseau aquatique dort est à côté d'un lac.
4. Tout ce qui dort dans ce qui est à côté d'un lac mange du poisson.
5. Chaque plongeon mange du poisson.

Montrer ensuite avec la méthode de votre choix que 5. est une conséquence logique de 1. à 4.

Exercice 2 [Unification (3 points)] Pour les problèmes d'unification suivants donner un unificateur principal s'il existe, ou indiquer qu'il n'y en a pas. u, x, y, z sont des variables, et a, b, c des constantes. Détailler l'application de l'algorithme d'unification pour chaque problème.

1. $p(f(y, z), c, x) \doteq p(f(z, g(b, x)), c, g(b, y))$
2. $p(y, x, y) \doteq p(a, z, z)$
3. $p(f(y), y) \doteq p(u, f(u))$

Exercice 3 [Résolution (3 points)] Montrer en utilisant la résolution que l'ensemble de clauses suivant est contradictoire (x, y, z, u sont des variables, a, b des constantes, f un symbole de fonction d'arité 2, g un symbole de fonction d'arité 1 et p, q, r des symboles de prédicats) :

$$\{q(y) \vee p(g(y)) \vee r(f(y, z)), p(a), \neg p(x) \vee \neg q(f(x, b)), \neg p(g(f(g(f(a, b))), b)), \neg r(u)\}$$

Exercice 4 [Gentzen (3 points)] On considère un langage du premier ordre, où $p/1$ et $q/1$ sont des symboles de prédicat. En utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats, démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $(\forall x p(x)) \rightarrow (\exists x p(x))$
2. $(\forall x p(x)) \rightarrow (\forall y p(y))$
3. $(\exists x (p(x) \wedge q(x))) \rightarrow \exists x p(x)$
4. $(\forall x (p(x) \wedge q(x))) \rightarrow \forall x p(x)$
5. $(\forall x (p(x) \wedge q(x))) \rightarrow (\forall x (p(x) \vee q(x)))$

Exercice 5 [Sémantique (3 points)] On considère une signature Σ avec $\Sigma_F = \{a/0, b/0, g/2\}$ et $\Sigma_P = \{p/2, r/1\}$. Soit l'interprétation $\mathcal{I}$ donnée par le domaine $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{I}(a) = 3$, $\mathcal{I}(b) = 4$, $\mathcal{I}(g)(x, y) = (x + y) \bmod 4$ ($u \bmod 4$ est le reste de la division entière de u par 4), $\mathcal{I}(p) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 4)\}$ et $\mathcal{I}(r) = \{2, 4\}$.

Indiquer si $\mathcal{I}$ est un modèle pour les formules suivantes. Justifier votre réponse pour 4.

1. $\forall x (r(x) \wedge r(b))$
2. $\exists x (p(x, a) \wedge r(x))$
3. $\forall x \exists y ((p(x, y) \wedge r(x)) \rightarrow q(g(x, y)))$
4. $\exists y ((\forall x p(x, y)) \rightarrow (\forall x r(x)))$

$\mathcal{I}$ n'est pas un modèle de la formule $A = \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(x, g(x, y)))$. Modifier $\mathcal{I}$ pour qu'elle devienne un modèle de A .

Exercice 6 [Unification (3 points)] Au lieu d'unifier deux termes, on souhaite unifier un ensemble de termes. Soient $\mathcal{X}$ un ensemble de variables et Σ une signature. Étant donné un ensemble $S \subseteq \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ (de taille ≥ 2) de termes, on veut obtenir un unificateur σ de sorte qu'il y ait un terme $t \in \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ tel que pour tout $t' \in S$, on a $\sigma(t') = t$ (égalité syntaxique). Donner un algorithme d'unification (qui renvoie un σ s'il existe ou échec sinon) pour ce problème. Exemple : pour $\{g(x, y), g(a, u), g(z, b)\}$, l'algorithme renvoie $\sigma = \{x \leftarrow a, y \leftarrow b, u \leftarrow b, z \leftarrow a\}$. En quoi cette notion d'unification peut être utile dans la résolution ?