Logique – Partiel (durée : 3 heures)

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de lire le sujet.

Pour la rédaction, utilisez une feuille pour les exercices 1 et 2, et une feuille différente pour chaque partie du problème.

Exercice 1 : Système de Gentzen $\mathcal{G}$ (temps recommandé : 20 minutes)

Dans le système $\mathcal{G}$, prouvez les formules suivantes :

1. $((\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to \mathbf{p}) \to (\mathbf{q} \to \mathbf{p})$.
2. $\neg(\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}) \to ((\neg\mathbf{p} \wedge \neg(\mathbf{q} \to \mathbf{r})) \vee \mathbf{r})$

Exercice 2 : Résolution (temps recommandé : 40 minutes)

1. Prouvez par résolution les propositions suivantes :
   (a) $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vee \mathbf{q}, \mathbf{q} \to \mathbf{r}, \neg(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q}) \vdash \mathbf{q} \vee \mathbf{r} \vee \mathbf{r}$
   (b) $\neg\mathbf{q} \to (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}), \neg\mathbf{q} \vee \mathbf{r} \vdash \mathbf{p} \vee \mathbf{r}$
2. Rappelez le principe de la preuve par réfutation.
3. Prouvez par réfutation les formules suivantes :
   (a) $(\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}) \to \neg\mathbf{p}$
   (b) $(\mathbf{p} \to \mathbf{r}) \to (\mathbf{q} \to \mathbf{r}) \to (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r}$
4. **(Bonus, plus difficile)** Soient Δ un ensemble de clauses et $\mathbf{p}$ une lettre propositionnelle. Soit Δ' obtenu à partir de Δ en retirant les clauses contenant $\neg\mathbf{p}$ et en supprimant toute occurrence de $\mathbf{p}$ dans les clauses restantes.
   (a) Expliquez pourquoi Δ' est équivalent à $\Delta \wedge \neg\mathbf{p}$.
   (b) Montrez que pour toute clause C, si $\Delta' \vdash C$ est prouvable par résolution, alors soit $\Delta \vdash C$, soit $\Delta \vdash C \vee \mathbf{p}$ est prouvable par résolution.

Problème (temps recommandé : 2 heures)

a) Sémantique du calcul propositionnel (temps recommandé : 40 minutes)

Soit $\oplus$ un nouveau connecteur logique, ayant la table de vérité suivante :

p	q	p ⊕ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1. Donnez les tables de vérité des formules suivantes :
   - $\mathrm{p} \oplus (\mathrm{q} \oplus \mathrm{p})$
   - $(\neg \mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \oplus \mathrm{p}$
   - $\mathrm{p} \oplus (\mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{q})$
2. Indiquez une formule A en forme normale disjonctive telle que $A \equiv p \oplus q$, et prouvez l'équivalence des deux formules.
3. Prouvez que toute formule A peut être transformée en formule B ne contenant aucun connecteurs $\oplus$ telle que $A \equiv B$.

b) Déduction Naturelle (temps recommandé : 1 heure)

Soit $DN^{\oplus}_{\mathrm{prop}}$ le système DN_{prop} augmenté des trois règles suivantes :

$$\frac{\Delta \vdash A \oplus B \qquad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \neg B} \oplus e$$

$$\frac{\Delta \vdash A \oplus B \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B} \oplus e$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \neg B \qquad \Delta, \neg A \vdash B}{\Delta \vdash A \oplus B} \oplus i$$

1. Montrez les propositions suivantes :

   (a) $\vdash_{DN^{\oplus}_{\mathrm{prop}}} \neg \mathrm{p} \to ((\mathrm{p} \oplus \mathrm{q}) \to \mathrm{q})$

   (b) $\vdash_{DN^{\oplus}_{\mathrm{prop}}} \neg(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \to ((\mathrm{p} \oplus \mathrm{q}) \to \mathrm{q})$

   (c) $\vdash_{DN^{\oplus}_{\mathrm{prop}}} (\mathrm{p} \to \neg \mathrm{q}) \to ((\neg \mathrm{p} \to \mathrm{q}) \to (\mathrm{p} \oplus \mathrm{q}))$

   (d) **(Bonus, plus difficile)** $\vdash_{DN^{\oplus}_{\mathrm{prop}}} (\mathrm{p} \oplus \mathrm{q}) \to (\mathrm{q} \oplus \mathrm{p})$
   Indice pour ce point 1d : on pourra admettre $\vdash_{DN^{\oplus}_{\mathrm{prop}}} \mathrm{p} \vee \neg \mathrm{p}$

2. On rappelle qu'une règle $\dfrac{\Delta_1 \vdash A_1 \quad \ldots \quad \Delta_n \vdash A_n}{\Delta \vdash A}$ est dite admissible quand la propriété suivante est vérifiée : si $\Delta_i \vdash A_i$ est dérivable pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ alors $\Delta \vdash A$ est dérivable.

   Prouvez que les trois règles suivantes sont admissibles dans DN_{prop} :

   (a) $\dfrac{\Delta \vdash (A \to \neg B) \wedge (\neg A \to B) \qquad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \neg B}$

   (b) $\dfrac{\Delta \vdash (A \to \neg B) \wedge (\neg A \to B) \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}$

   (c) $\dfrac{\Delta, A \vdash \neg B \qquad \Delta, \neg A \vdash B}{\Delta \vdash (A \to \neg B) \wedge (\neg A \to B)}$

3. Montrez que $A \oplus B \equiv (A \to \neg B) \wedge (\neg A \to B)$. En déduire que pour toute formule de A, il existe une formule B ne contenant aucun connecteur $\oplus$ telle que $A \equiv B$.

4. Montrez que que toute preuve dans $DN^{\oplus}_{\text{prop}}$ d'une formule A peut être transformée en une preuve dans DN_{prop} d'une formule B ne contenant aucun connecteur $\oplus$ telle que $A \equiv B$.

c) Système de Hilbert (temps recommandé : 20 minutes)

1. Proposez trois axiomes à rajouter au système de Hilbert pour simuler les trois règles précédentes.

2. Dans H_{prop} augmenté de ces trois axiomes, prouvez la formule $\neg \mathrm{p} \to ((\mathrm{p} \oplus \mathrm{q}) \to \mathrm{q})$. Vous pouvez vous aider du théorème de la déduction.