Logique – Examen final

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1 [Calcul propositionnel (6 points)]

1. Donner une dérivation du séquent $\vdash p \to p$ dans le système de Hilbert $H_{\to}$ sans utiliser le théorème de la déduction.
2. Donner une dérivation du séquent $(\neg p) \to p \vdash p$ dans le système de Hilbert H_{prop} en utilisant éventuellement le point précédent mais sans utiliser le théorème de la déduction.
3. Soit $\mathtt{T}(\ )$ une fonction qui enlève tous les connecteurs $\to$ d'une formule propositionnelle :

$$\begin{array}{lcll} \mathtt{T}(p) & := & p & \text{pour toute lettre propositionnelle } p \\ \mathtt{T}(\neg A) & := & \neg\mathtt{T}(A) & \\ \mathtt{T}(A \vee B) & := & \mathtt{T}(A) \vee \mathtt{T}(B) & \\ \mathtt{T}(A \wedge B) & := & \mathtt{T}(A) \wedge \mathtt{T}(B) & \\ \mathtt{T}(A \to B) & := & (\neg\mathtt{T}(A)) \vee \mathtt{T}(B) & \end{array}$$

Considérons l'extension naturelle de $\mathtt{T}(\ )$ aux séquents donnée par :

$$\mathtt{T}(A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k) := \mathtt{T}(A_1), \ldots, \mathtt{T}(A_n) \vdash \mathtt{T}(B_1), \ldots, \mathtt{T}(B_k)$$

Montrer la propriété suivante :
Si un séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$ alors $\mathtt{T}(\Delta \vdash \Gamma)$ est aussi dérivable dans $\mathcal{G}$.

Exercice 2 [Gentzen (2,5 points)] On considère un langage du premier ordre, où $P/1, Q/1$ sont des symboles de prédicat. On veut utiliser le système de Gentzen pour démontrer que la formule $[\exists x\ P(x)] \wedge [\exists x\ Q(x)]$ est conséquence logique de la formule $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$.

Est-ce que la dérivation suivante accomplit cet objectif? Si oui, expliquer clairement pourquoi, sinon corriger en exhibant une solution.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y), Q(y) \vdash P(y) \quad (\mathit{axiome})}{P(y) \wedge Q(y) \vdash P(y)}}{\exists y\ (P(y) \wedge Q(y)) \vdash P(y)}}{\exists y\ (P(y) \wedge Q(y)) \vdash \exists x\ P(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y), Q(y) \vdash Q(y) \quad (\mathit{axiome})}{P(y) \wedge Q(y) \vdash Q(y)}}{\exists y\ (P(y) \wedge Q(y)) \vdash Q(y)}}{\exists y\ (P(y) \wedge Q(y)) \vdash \exists x\ Q(x)}}{\exists y\ (P(y) \wedge Q(y)) \vdash [\exists x\ P(x)] \wedge [\exists x\ Q(x)]}$$

Exercice 3 [Résolution (5,5 points)] On considère un langage du premier ordre, où $V/1, P/1, T/1, E/1$ sont des symboles de prédicat. En appliquant la méthode de résolution (forme prénexe, Skolemisation, forme normale conjonctive, forme clausale, coupure et factorisation), montrer que l'ensemble suivant est contradictoire :

- $H_1 : \forall x\ (V(x) \rightarrow P(x))$
- $H_2 : \forall x\ (T(x) \rightarrow \neg P(x))$
- $H_3 : \neg\forall x\ [\neg(\neg T(x) \vee \neg V(x)) \rightarrow E(x)]$

Exercice 4 [Sémantique (6 points)] On considère un langage du premier ordre, où $f/1, a/0, b/0$ sont des symboles de fonction et $R/2$ est un symbole de prédicat. Soit $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\}$ l'ensemble de formules suivantes :

$$\begin{array}{lcl} A_1 & := & \forall x \forall y \forall z\ [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)] \\ A_2 & := & \forall x\ [R(a,x) \wedge R(x,b)] \\ A_3 & := & \forall x\ R(x, f(x)) \end{array}$$

1. Proposer une interprétation $\mathcal{I}$ qui soit un modèle de l'ensemble $\mathcal{F}$. Justifier votre réponse formellement.
2. Montrer que la formule $\exists x\ R(f(x), a)$ n'est pas une conséquence logique de l'ensemble $\mathcal{F}$ en exhibant un modèle de l'ensemble $\mathcal{F}$ qui ne soit pas un modèle de la formule $\exists x\ R(f(x), a)$. Justifier votre réponse formellement.