

## Logique – Partiel (durée : 3 heures)

*Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.*

*Il est recommandé de lire le sujet.*

**Pour la rédaction, utilisez une feuille pour les exercices 1 et 2, une autre pour les exercices 3 et 4 et enfin une troisième pour l'exercice 5.**

**Exercice 1 [Calcul propositionnel - sémantique]** Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? contradictoires ? Justifiez sans utiliser des tables de vérité. Si une formule n'est ni valide, ni contradictoire, donner une interprétation qui la falsifie et une interprétation qui la satisfait.

1.  $(p \rightarrow \neg q) \vee p$
2.  $\neg q \rightarrow ((p \vee r) \vee (p \wedge q))$
3.  $(p \rightarrow (\neg p \vee q)) \rightarrow q$
4.  $p \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow q)$
5.  $((p \vee q) \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \vee q \vee p)$

**Exercice 2 [Calcul propositionnel - sémantique]** Considérez la table de vérité suivante associée à une formule inconnue  $A$  :

| p | q | r | A |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | F | V | V |
| F | V | F | F |
| F | V | V | V |
| V | F | F | F |
| V | F | V | F |
| V | V | F | V |
| V | V | V | V |

Donnez une formule  $A$  dont la table de vérité soit celle ci-dessus.

**Exercice 3 [Calcul propositionnel - théorie de la démonstration]**

- Donner une dérivation en déduction naturelle propositionnelle ( $DN_{prop}$ ) des séquents suivants :
  - $\vdash (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$
  - $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- Pour chacun des séquents suivants, déterminer s'ils sont valides en donnant une dérivation dans le système  $\mathcal{G}$  ou en donnant une interprétation qui falsifie le séquent :
  - $\vdash \neg p \wedge (\neg q \vee \neg r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $\vdash p \rightarrow (q \vee r), p \rightarrow q, r$

**Exercice 4 [Calcul propositionnel - théorie de la démonstration]** On considère le système de calcul des séquents  $\mathcal{G}'$  qui est obtenu à partir du système  $\mathcal{G}$  en remplaçant la règle  $\wedge d$  par la règle suivante :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B, \Delta_1, \Delta_2} \wedge d'$$

où les contextes des deux séquents prémisses peuvent être différents ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  peuvent être différents, idem pour  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ). On remarque que dans le cas où les contextes sont identiques, ils se retrouvent dupliqués dans le séquent conclusion.

**Exemple** Les dérivations suivantes utilisent une instance de la nouvelle règle  $\wedge d'$  :

$$\frac{\frac{\frac{}{C \vdash C, D} \text{ax} \quad \frac{\frac{}{C \vdash C, B, B} \text{ax}}{C \vdash C \vee B, D, B} \vee d}{C, C \vdash C \wedge (C \vee B), D, D, B} \wedge d'}{C \vdash C \rightarrow (C \wedge (C \vee B)), D, D, B} \rightarrow d} \quad \frac{\frac{\frac{}{D \vdash D, C, A} \text{ax}}{D \vdash D \vee C, A} \vee d \quad \frac{\frac{}{B \vdash B, C, B} \text{ax}}{B \vdash B \vee C, B} \vee d}{D, B \vdash (D \vee C) \wedge (B \vee C), A, B} \wedge d'$$

**Remarque :** Toutes les autres règles du système  $\mathcal{G}'$  sont les mêmes que celles du système  $\mathcal{G}$ .

**Théorème de l'affaiblissement (rappel) :** Si le séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  est dérivable dans le système  $\mathcal{G}$ , alors pour toute formule  $A$  les séquents  $\Gamma \vdash A, \Delta$  et  $\Gamma, A \vdash \Delta$  sont aussi dérivables dans  $\mathcal{G}$ .

**Théorème de la contraction (rappel) :** Si le séquent  $\Gamma \vdash A, A, \Delta$  est dérivable dans le système  $\mathcal{G}$ , alors le séquent  $\Gamma \vdash A, \Delta$  est aussi dérivable dans  $\mathcal{G}$ . De même, si  $\Gamma, A, A \vdash \Delta$  est dérivable dans  $\mathcal{G}$ , alors le séquent  $\Gamma, A \vdash \Delta$  est aussi dérivable dans  $\mathcal{G}$ .

- Montrez que s'il existe une dérivation du séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  dans  $\mathcal{G}'$ , alors il existe une dérivation du séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  dans le système  $\mathcal{G}$  (pensez à faire un raisonnement par induction).
- Quelle propriété doit satisfaire le système  $\mathcal{G}'$  pour obtenir la réciproque (à savoir : s'il existe une dérivation du séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  dans  $\mathcal{G}$ , alors il existe une dérivation du séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  dans le système  $\mathcal{G}'$ ) ?

**Exercice 5 [Calcul des prédicats - formalisation]** On prend comme domaine l'ensemble des employés d'une entreprise de restauration dans cet entreprise, à chaque employé est attribué un remplaçant.

On considère les symboles de fonctions  $\Sigma_F = \{a/0, r/1\}$  où :

$r(x)$  dénote le remplaçant de  $x$  ;  
 $a$  dénote l'employé Albert ;

et les symboles de prédicats  $\Sigma_P = \{S/1, C/1, O/2\}$  où :

$S(x)$  "  $x$  sert en salle " ;  
 $C(x)$  "  $x$  sait faire le café " ;  
 $O(x, y)$  "  $x$  est sous les ordres de  $y$  ".

1. Traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

- (a) Le remplaçant d'Albert ne sait pas faire le café.
- (b) Tous les employés qui savent faire le café sont sous les ordres d'Albert.
- (c) Aucun des employés qui ne servent pas en salle ne sont sous les ordres de quelqu'un qui sait faire le café.
- (d) Au moins un employé est sous les ordres du remplaçant d'un employé qui sert en salle.

2. Exprimez en français les formules suivantes :

- (a)  $\forall x. (O(x, r(a)) \rightarrow S(x))$
- (b)  $\exists x. (C(x) \wedge \neg C(r(x)))$
- (c)  $\forall x. (\exists y. (O(y, x) \wedge C(y)) \rightarrow C(x))$
- (d)  $\neg \exists x. (\forall y. ((C(y) \wedge S(y)) \rightarrow O(y, x)))$