Université Paris Diderot - L3 Informatique 17 Mai 2010

Logique – Examen final

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1 [Gentzen (5 points)] On considère un langage du premier ordre, où $P/1, Q/1, R/2$ sont des symboles de prédicat. En utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats, démontrer que la formule

$$[\forall x\ P(x)] \to [(\forall y\ \exists x\ R(x,y)) \wedge \neg\forall x\ Q(x)]$$

est conséquence logique de la formule

$$\exists x\ [P(x) \to ((\forall y\ R(x,y)) \wedge \neg Q(x))].$$

Exercice 2 [Unification (3 points)] Exhiber un problème d'unification $\mathcal{P}$ tel que l'application de l'algorithme vu en cours trouve un unificateur principal de $\mathcal{P}$ en utilisant exactement deux fois la règle de décomposition, deux fois la règle de remplacement, une fois la règle d'effacement et aucune fois la règle d'orientation.

Exercice 3 [Résolution (6 points)] On considère un langage du premier ordre, où $P/1, Q/1, R/2$ sont des symboles de prédicat. En appliquant la méthode de résolution (forme prénexe, Skolemisation, forme normale conjonctive, forme clausale, coupure et factorisation), montrer que la formule

$$[\forall x\ P(x)] \to [(\forall y\ \exists x\ R(x,y)) \wedge \neg\forall x\ Q(x)]$$

est conséquence logique de la formule

$$\exists x\ [P(x) \to ((\forall y\ R(x,y)) \wedge \neg Q(x))].$$

Exercice 4 [Sémantique (6 points)] On considère un langage du premier ordre sur l'alphabet $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0, s/1\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{I/1, C/2, E/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat.

Considérons les formules suivantes :

- $T_1 = \forall x\ \forall y\ (E(y, s(x)) \to C(x,y))$.
- $T_2 = T_1 \wedge \neg\exists x\ (I(x) \wedge E(x,a))$.
- $T_3 = T_1 \to [T_2 \wedge \forall x\ I(x)]$.
- $T_4 = [T_1 \vee \forall x\ I(x)] \to T_3$.

Soit $\mathcal{D}$ le domaine fini $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\}$.

A. Pour chaque formule T_i $(i = 1,2,3,4)$ donner une interprétation $\mathcal{O}_i$ pour tous les symboles dans Σ telle que $\mathcal{O}_i$ soit un modèle de T_i.

B. Pour chaque formule T_i $(i = 1,2,3,4)$ donner une interprétation $\mathcal{N}_i$ pour tous les symboles dans Σ telle que $\mathcal{N}_i$ falsifie la formule T_i.