Calculs Numériques (CN6)

L3 d'informatique — durée 2h30

Jeudi 20 mai 2010

La rédaction sera prise en compte dans la notation. Justifiez toutes vos réponses et expliquez les fondements de vos algorithmes en français avant de les rédiger en pseudo-code compréhensible et commenté où nécessaire. Le barème est donné seulement à titre indicatif.

Exercice 1 (8 points)
Soit $y = f(x)$ une fonction dont on ne connaît que les ordonnées $Y = y_1, y_2, \ldots, y_n$ pour les n abscisses $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

1. Proposer une fonction `int Surface(int n, int [] X, int [] Y)` qui calcule une approximation de la surface comprise entre le graphe de la fonction, l'axe des x et les droites verticales $x = x_1$ et $x = x_n$, c'est à dire, en terme d'analyse mathématique, l'intégrale :

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx.$$

2. Simuler votre algorithme pour les valeurs :

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_1 = 0 \\ x_2 = 0.5 & y_2 = 1 \\ x_3 = 1 & y_3 = 2 \\ x_4 = 2 & y_4 = 1 \end{array}$$

3. Si en plus on sait qu'entre x_1 et x_n la fonction se rapproche d'un polynome de degré n, comment peut-on combiner les méthodes d'interpolation polynomiale vues en cours avec la fonction `Surface` pour calculer la surface avec une erreur inférieure à $\varepsilon = 10^{-6}$? Proposez un algorithme.
4. Simuler le premier tour de boucle de votre algorithme sur l'exemple de la question 2.

Exercice 2 (6 points)
Résoudre par la méthode de la décomposition LU ou PLU, substitution en avant, et substitution en arrière, le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Résoudre ensuite le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

de la manière la plus économique en termes d'opération élémentaires.

Exercice 3 (6 points)
On souhaite trouver une approximation d'un point d'intersection entre les deux courbes

$$y = e^x$$

et

$$y = \frac{x^2}{2} + x + 1.$$

1. Expliquer comment on peut appliquer les méthodes de recherche numérique de racines d'équations pour résoudre le problème.
2. Montrer que dans l'intervalle $[-1, 1]$ un point d'intersection P entre ces deux courbes existe.
3. Facultativement, montrer que ce point d'intersection P entre ces deux courbes dans l'intervalle $[-1, 1]$ est unique.
4. Dire si la méthode dychothomique par bissection vue en cours peut être appliquée dans ce cas pour trouver l'abscisse de P. Si la réponse est affirmative, calculer le trois premières valeurs approximées (en plus des deux valeurs initiales) de la solution cherchée.
5. Refaire le même calcul en appliquant la méthode de Newton à partir de l'approximation $x_0 \cancel{=} 0$ en simulant les trois premières itérations de la méthode. $x_0 = 1$

Rappel. La constante e vaut approximativement 2,71828