Outils Logiques - 2020-2021, CC Épreuve commune

Consignes *Durée : 2h. L'utilisation de tout document ou dispositif électronique est interdite. Vos réponses doivent être justifiées. Le barème est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 (6 points) *On considère la signature $\Sigma = \{a^0, b^1, c^3\}$. Soit $T_\Sigma = \cup_{n \geq 0} T_n$ l'ensemble associé à la Σ-algèbre initiale.*

1. *Lister les éléments de T_0 et T_1. Donner le nombre d'éléments de T_2.*
2. *On note h l'unique morphisme de la Σ-algèbre initiale vers la Σ-algèbre $(\{0,1\}^*; f_a, f_b, f_c)$ composée de l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0,1\}$ muni des fonctions $f_a = \varepsilon$, $f_b(x) = 0x$ et $f_c(x,y,z) = 1xyz$.*

   Donner l'image par h du terme $\Big(b, \big(c, a, (b, a), (c, a, a, a)\big)\Big)$.

   Montrer que $h(T_\Sigma) = \{0,1\}^*$, c'est-à-dire que tout mot sur l'alphabet $\{0,1\}$ est l'image d'un terme de T_Σ par h.
3. *On considère le système de réécriture suivant sur $\{0,1\}^*$: $w \to w'$ si w' est obtenu en remplaçant dans w un facteur 01 par le mot 100.*

   Montrer que ce système termine. Pour cela, on pourra considérer l'interprétation des mots dans les entiers naturels définie par $g(\varepsilon) = 1$, $g(x0) = \alpha + g(x)$ et $g(x1) = \beta \cdot g(x)$, où α et β sont des entiers naturels à choisir convenablement.
4. *Soit maintenant le système de réécriture où $w \to w'$ si w' est obtenu en remplaçant dans w un facteur 01 par le mot 001. Ce système termine-t-il ?*

Exercice 2 (6 points) *On rappelle que : (i) $\mathbf{2} = \{0,1\}$, (ii) l'implication est un opérateur logique dénoté par le symbole $\to$ et défini par $x \to y = \neg x \vee y$ et (iii) $\equiv$ dénote l'équivalence logique. Montrer que*

1. *l'implication n'est pas associative, ni commutative ;*
2. *$x \to y \equiv \neg y \to \neg x$;*
3. *$0 \to x \equiv 1$;*
4. *$x \to 0 \equiv \neg x$;*
5. *toute fonction booléenne $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$, pour $n \geq 1$, est définissable par une formule qui utilise seulement les symboles $\to$ et 0.*

On dit qu'une formule A est une conséquence logique d'une formule B si pour toute affectation v telle que $v \vDash B$, on a $v \vDash A$.

6. *Montrer que la formule A est une conséquence logique de la formule B si et seulement si $B \to A$ est valide.*

Exercice 3 (6 points) *Rappelons les règles usuelles du calcul des séquents de Gentzen :*

$$(Ax) \quad \frac{}{A, \Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$(\wedge \vdash) \quad \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\vdash \wedge) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\vee \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\vdash \vee) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

$$(\neg \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\vdash \neg) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$$

Rappelons également que l'on peut étendre le calcul des séquents avec les règles suivantes pour l'implication :

$$(\to_L)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\to_R)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}$$

On rappelle que l'opérateur conditionnel est défini comme $(x \rightsquigarrow y, z) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$*, et on a l'équivalence* $(x \rightsquigarrow y, z) \equiv (x \to y) \wedge (\neg x \to z)$*.*

1. *Donner une preuve en calcul des séquents du séquent suivant :*

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vdash (A \to B) \wedge (\neg A \to C)$$

2. *Pour chacune des règles d'inférence suivantes, justifiez si elle est correcte (la validité de toutes ses hypothèses entraîne la validité de sa conclusion) ou réversible (la validité de sa conclusion entraîne la validité de toutes ses hypothèses), ou les deux.*

   (a)

$$(\rightsquigarrow_1)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta \quad \Gamma \vdash A, C, \Delta}{\Gamma \vdash (A \rightsquigarrow B, C), \Delta}$$

   (b)

$$(\rightsquigarrow_2)\ \frac{\Gamma \vdash A, C, \Delta \quad \Gamma, A \vdash B, \Delta \quad \Gamma \vdash B, C, \Delta}{\Gamma \vdash (A \rightsquigarrow B, C), \Delta}$$

Exercice 4 (6 points) *Ci-dessous vous trouverez 4 descriptions d'ensembles de formules et pour chaque ensemble un exemple de formule dans l'ensemble. Pour chaque ensemble vous devez : (A) décrire de façon succincte le meilleur algorithme que vous connaissez qui peut déterminer si une formule de l'ensemble est réfutable en précisant si l'algorithme est efficace (temps polynomial dans la taille de la formule) et (B) appliquer l'algorithme décrit à la formule donnée en exemple. NB Il est inutile : (i) de répondre à (B) sans répondre à (A), (ii) de répondre à (A) et ensuite d'appliquer dans (B) une méthode différente de celle décrite dans (A) et (iii) d'appliquer une méthode exponentielle dans un cas où une méthode polynomiale est connue.*

1. *CNF : formules qui sont une conjonction de clauses.*

$$(x \vee y \vee \neg z \vee w) \wedge (x \vee y \vee z \vee \neg w) \wedge (x \vee y \vee \neg w) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

2. *DNF : formules qui sont une disjonction de monômes.*

$$(x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge w) \vee (z \wedge \neg z).$$

3. *3-CNF : formules dans CNF où chaque clause a au plus 3-littéraux.*

$$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y) \wedge \neg x\ .$$

4. *Version duale des formules de Horn : formules dans CNF où dans chaque clause il y a au plus un littéral négatif (avec négation).*

$$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee w \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee w) \wedge (\neg x \vee y \vee w) \wedge \neg w.$$

1 Corrigé

1.1 Exercice 1

SOLUTION 1. **(3 fois 0,5 point)** $T_0 = \{a\}$; $T_1 = \{a, (b, a), (c, a, a, a)\}$; $|T_2| = 31$.

SOLUTION 2. **(0,5 + 1 point)** 0101.

Par induction sur la longueur des mots. ε est l'image de a. Si $u = 0v$, alors u est l'image de (b, x) où x est tel que $h(x) = v$. Si $u = 1v$, alors u est l'image de (c, x, a, a) où x est tel que $h(x) = v$.

SOLUTION 3. **(2 points)** Si $v \in \{0,1\}^*$, on définit $g_v : g(\{0,1\}^*) \to \mathbb{N}$ par $g_v(g(u)) = g(uv)$. Si $\alpha, \beta > 0$, alors la fonction g_v est strictement croissante.

On a $g(u01v) = g_v(g(u01)) = g_v(\beta(\alpha + g(u)))$ et $g(u100v) = g_v(g(u100)) = g_v(2\alpha + \beta g(u))$. Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ par exemple, on a $\beta(\alpha + g(u)) > 2\alpha + \beta g(u)$, et donc par croissance stricte de g_v : $g(u01v) > g(u100v)$. La fonction g est donc une interprétation du système de réécriture sur un ordre bien fondé, qui décroît strictement à chaque application de la règle, donc le système termine.

SOLUTION 4. **(1 point)** Ce système ne termine pas, car on a par exemple la suite infinie de réécriture

$$01 \to 001 \to 0001 \to \dots$$

1.2 Exercice 2

SOLUTION 1. [1 point] L'implication n'est pas associative, car pour l'affectation $v(x) = v(y) = v(z) = 0$, on a que $[\![x \to (y \to z)]\!]v = 1 \neq 0 = [\![(x \to y) \to z]\!]$. L'implication n'est pas commutative, car pour l'affectation $v(x) = 1$ et $v(y) = 0$, on a que $[\![x \to y]\!]v = 0 \neq 1 = [\![y \to x]\!]$.

SOLUTION 2. [1 point] La table de vérité de ces formules est

x	y	$x \to y$	$\neg y \to \neg x$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Donc, pour toute affectation v, les deux formules prennent la même valeur. Elles sont donc équivalentes.

SOLUTION 3. [0,5 points] On a que $0 \to x \equiv \neg 0 \vee x \equiv 1 \vee x \equiv 1$, car 1 est l'élément absorbant de la disjonction.

SOLUTION 4. [0,5 poinst] On a que $x \to 0 \equiv \neg x \vee 0 \equiv \neg x$, car 0 est l'élément neutre de la disjonction.

SOLUTION 5. [1,5 points] Il suffit d'exprimer les opérateurs logiques $\neg$ et $\vee$ à l'aide des opérateurs $\to$, 0, car nous avons vu que les opérateur $\neg$ et $\vee$ permettent de définir toutes les fonctions booléenne. Par le numéro précédent, on a que $\neg x \equiv x \to 0$. De plus, on a que $x \to y \equiv \neg x \vee y$ ce qui peut-être reformuler par $\neg x \to y \equiv x \vee y$. En remplaçant la négation par la définition ci-dessus, on obtient que $x \vee y \equiv (x \to 0) \to y$.

SOLUTION 6. [1,5 points] ($\Rightarrow$) Supposons que la formule A est une conséquence logique de la formule B. Soit v une affectation. Si $v \vDash B$, alors on a que $v \vDash A$ par la définition de conséquence logique. Donc, $v \vDash B \to A$. Si $v \nvDash B$, alors $v \vDash B \to A$ par la définition de l'implication. Donc, $v \vDash B \to A$. Ainsi, pour toute affectation v, $v \vDash B \to A$, c'est-à-dire que $B \to A$ est valide.

($\Leftarrow$) Supposons que $B \to A$ est valide. Soit v une affectation tel que $v \vDash B$. On a que $v \vDash B \to A$ puisque la formule est valide. Par conséquent, on a que $v \vDash A$. Donc, la formule A est une conséquence logique de la formule B.

1.3 Exercice 3

Solution 1. **(2 points)**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A,B,A\vdash B}\,\text{ax}}{A\wedge B,A\vdash B}\,\wedge_L \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{C,A\vdash A,B}\,\text{ax}}{\neg A,C,A\vdash B}\,\neg_L}{\neg A\wedge C,A\vdash B}\,\wedge_L}{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge C),A\vdash B}\,\vee_L}{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge C)\vdash A\to B}\,\to_R \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A,B\vdash A,C}\,\text{ax}}{A\wedge B\vdash A,C}\,\wedge_L \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg A,C\vdash A,C}\,\text{ax}}{\neg A\wedge C\vdash A,C}\,\wedge_L}{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge C)\vdash A,C}\,\vee_L}{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge C),\neg A\vdash C}\,\neg_L}{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge C)\vdash \neg A\to C}\,\to_R}{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge C)\vdash (A\to B)\wedge(\neg A\to C)}\,\wedge_R$$

Solution 2.

(a) **(2 points)** L'arbre

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,A\vdash B,\Delta}{\Gamma\vdash A\to B,\Delta}\,\to_R \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash A,C,\Delta}{\Gamma,\neg A\vdash C,\Delta}\,\neg_L}{\Gamma\vdash \neg A\to C,\Delta}\,\to_R}{\Gamma\vdash (A\to B)\wedge(\neg A\to C),\Delta}\,\wedge_R$$

est composé de règles correctes et réversibles. Grâce à l'équivalence $(A \rightsquigarrow B, C) \equiv (A \to B) \wedge (\neg A \to C)$, on conclut que la règle $(\rightsquigarrow_1)$ est correcte et réversible.

(b) **(2 points)** L'arbre de règles correctes et réversibles

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,A\vdash A,\Delta}\,(\text{ax})}{\Gamma\vdash A,\neg A,\Delta}\,\neg_R \quad \Gamma\vdash A,C,\Delta}{\Gamma\vdash A,\neg A\wedge C,\Delta}\,\wedge_R \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma,A\vdash B,\Delta}{\Gamma\vdash \neg A,B,\Delta}\,\neg_R \quad \Gamma\vdash B,C,\Delta}{\Gamma\vdash B,\neg A\wedge C,\Delta}\,\wedge_R}{\Gamma\vdash A\wedge B,\neg A\wedge C,\Delta}\,\wedge_R}{\Gamma\vdash (A\rightsquigarrow B,C),\Delta}\,\vee_R$$

permet de conclure que $(\rightsquigarrow_2)$ est correcte et réversible.

1.4 Exercice 4

Solution 1. [1,5 points] On peut appliquer la méthode de résolution ou la méthode DP qui en général prennent un temps exponentiel. Par exemple, la méthode de résolution peut produire le calcul suivant :

$$\begin{array}{ll} (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) & \text{(cas (6) sur } w) \\ \emptyset & \text{(car } z \text{ monotone)} \end{array}$$

On obtient la CNF vide et donc la formule est satisfaisable. Avec la méthode DP, si on pose $w = 0$ on obtient :

$$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$$

qui est satisfaisable car à nouveau z est monotone.

Solution 2. [1,5 points] Une DNF est réfutable ssi tous les monômes sont réfutables. Et un monôme est réfutable ssi il contient une variable et sa négation ; une condition qu'on vérifie en temps linéaire. Donc la DNF en question est satisfaisable car le premier et le troisième monômes sont satisfaisables.

Solution 3. [1,5 points] Pour les 3-CNF on applique aussi la méthode de résolution ou la méthode DP. On sait que si on avait une méthode efficace pour 3-CNF on l'aurait aussi pour CNF. Ici $\neg x$ est unitaire et on obtient :

$$(y \vee \neg z) \wedge (y \vee z) \wedge (\neg y) \ .$$

Maintenant $\neg y$ est unitaire et on obtient :

$$\neg z \wedge z$$

d'où on dérive la clause vide. La formule est donc réfutable.

Solution 4. [1,5 points] Pour le dual d'une formule de Horn on peut appliquer la méthode de résolution (ou la méthode DP) en sachant que si on arrive au dernier cas (6) on sait que la formule est satisfaisble. La méthode est alors polynomiale. Dans le cas en question, w est unitaire et on dérive :

$$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y).$$

Comme il n'y a pas de clause unitaire (ni de clause vide) on peut satisfaire la CNF simplement en affectant 1 à toutes les variables.