Contrôle Continu

Consignes. *Durée 50'. L'utilisation de tout document ou dispositif électronique est interdite. Vos réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1 (6 points) *Soient* $\mathbf{2} = \{0,1\}$ *l'ensemble des valeurs booléennes et* $ITE : \mathbf{2}^3 \to \mathbf{2}$ *la fonction booléenne 'if-then-else' telle que* $ITE(x,y,z) = y$ *si* $x = 1$ *et* $ITE(x,y,z) = z$ *si* $x = 0$. *Soit* $\mathbf{F}$ *le plus petit ensemble de fonctions booléennes qui satisfait les conditions suivantes pour tout* $n \geq 1$ *:*

1. *les fonctions* projections $PRJ_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$ *sont dans* $\mathbf{F}$ *pour* $1 \leq i \leq n$,
2. *les fonctions* constantes $ZERO(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *et* $ONE(x_1,\ldots,x_n) = 1$ *sont dans* $\mathbf{F}$,
3. *si les fonctions* h_1, h_2, h_3 *à* n *arguments sont dans* $\mathbf{F}$ *alors la fonction suivante (composition avec ITE) y est aussi :* $ITE(h_1(x_1,\ldots,x_n), h_2(x_1,\ldots,x_n), h_3(x_1,\ldots,x_n))$.

Par exemple, il suit de la définition que la fonction $f : \mathbf{2}^2 \to \mathbf{2}$ *suivante est dans* $\mathbf{F}$ *:*

$$f(x_1,x_2) = ITE(PRJ_1(x_1,x_2), ZERO(x_1,x_2), PRJ_2(x_1,x_2))$$

et en simplifiant on voit que : $f(x_1,x_2) = ITE(x_1, 0, x_2) = AND(NOT(x_1), x_2)$.

Pour les assertions suivantes, donnez soit une preuve soit un contrexemple :

— *Toutes les fonctions booléennes à* 3 *arguments sont dans* $\mathbf{F}$.

— *Toutes les fonctions booléennes à* n *arguments,* $n \geq 1$, *sont dans* $\mathbf{F}$.

— *Les réponses aux deux points précédents ne changent pas si on supprime la condition 2., c'est à dire si on ne suppose pas que les fonctions constantes ZERO et ONE sont dans* $\mathbf{F}$.

Exercice 2 (8 points) Rappel : *Soit* R *une règle d'inférence avec hypothèses* $H_1 \cdots H_n$, $n \geq 1$ *et conclusion* C. *On dit que* R *est* correcte *si pour toute affectation* v, *si l'interprétation des hypothèses* $H_1,\ldots,H_n$ *est* 1 *par rapport à* v *alors l'interprétation de la conclusion* C *est aussi* 1 *par rapport au même* v. *Et on dit qu'elle est* réversible *si pour toute affectation* v, *si l'interprétation de la conclusion est* 1 *alors l'interprétation des hypothèses* $H_1,\ldots,H_n$ *est aussi* 1.

On se place dans le cadre du calcul des séquents *et on dénote par* $A \oplus B$ *l'*ou exclusif *des formules* A *et* B. *Considérez les* 4 *règles d'inférence suivantes et pour chaque règle précisez si elle est correcte et si elle est réversible (donc deux réponses par règle, et pour chaque réponse soit une preuve soit un contre-exemple).*

$$(R_1)\quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash A, \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta} \qquad (R_2)\quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}$$

$$(R_3)\quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta} \qquad (R_4)\quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}$$

Exercice 3 (6 points) *Soient* A *une formule en CNF (conjonction de clauses) et* B *la formule suivante :*

$$\neg((x_1 \oplus \neg x_2) \oplus (\neg x_3 \oplus \neg x_4)) \ .$$

Pour les assertions suivantes, donnez soit une preuve soit un contre-exemple.

— B *est une conséquence logique de* A *si et seulement si* $A \vdash B$ *est prouvable dans le calcul des séquents.*

— B *est une conséquence logique de* A *si et seulement si* $A \wedge B$ *est satisfaisable.*

— B *est une conséquence logique de* A *si et seulement si* $A \wedge \neg B$ *n'est pas satisfaisable.*

Bonus *La formule* $A \wedge \neg B$ *n'est pas une CNF; proposez une méthode pour la transformer en une formule CNF* C *qui est satisfaisable si et seulement si* $A \wedge \neg B$ *est satisfaisable.*

Solutions

SOLUTION DE L'EXERCICE 1

1 et 2 Vrai et Vrai. Par exemple, on sait que les fonctions NOT et AND suffisent à définir toutes les fonctions booléennes à n arguments (y compris celles à 3 arguments). Donc il suffit de montrer que ces deux fonctions sont dans $\mathbf{F}$. On observe :

$$NOT(x_1) = ITE(x_1, ZERO(x_1), ONE(x_1))$$
$$AND(x_1, x_2) = ITE(PRJ_1(x_1, x_2), ITE(PRJ_2(x_1, x_2), ONE(x_1, x_2), ZERO(x_1, x_2)), ZERO(x_1, x_2))$$

3 Faux. Sans les fonctions $ZERO$ et ONE il est impossible par exemple de définir la fonction $NOT : \mathbf{2} \to \mathbf{2}$. Les projections avec un argument sont rien d'autre que la fonction identité. Et si on compose l'ITE à des identités on a encore l'identité :

$$ITE(x_1, x_1, x_1) = x_1 \ .$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2 On a (contrexemples entre parenthèses) :

(R_1) Correcte et réversible.
(R_2) Correcte mais pas réversible ($A = \mathbf{0}$ et $B = \mathbf{1}$).
(R_3) Pas correcte ($A = \mathbf{0}$ et $B = \mathbf{1}$) mais réversible.
(R_4) Pas correcte ($A = B = \mathbf{0}$) mais réversible.

Les propriétés positives peuvent être vérifiées en utilisant plusieurs méthodes : par dépliage des définitions et analyse de cas, par réduction au calcul des séquents, par équivalence logique,... Par exemple, considérons la correction de (R_1). On pose $C = \bigwedge_{X\in\Gamma} X$ et $D = \bigvee_{X\in\Delta} X$. On sait que :

$$v \models \neg C \vee \neg A \vee B \vee D \text{ et } v \models \neg C \vee \neg B \vee A \vee D$$

et on veut montrer que :

$$v \models \neg C \vee \neg(A \oplus B) \vee D \tag{1}$$

Par analyse de cas :

— Si $v \models C$ ou $v \models D$ on a (1).
— Sinon on doit avoir $v \models \neg A \vee B$ et $v \models A \vee \neg B$ ce qui est équivalent à dire $v \models \neg(A \oplus B)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3 On peut répondre aux questions sans regarder la structure de B !

1. Vrai. Dire que B est une conséquence logique de A est équivalent à dire que le séquent $A \vdash B$ est valide et par les propriétés de correction et complétude du calcul des séquents ceci est équivalent à dire que le séquent $A \vdash B$ est prouvable.
2. Faux. Par exemple, si on prend $A = \mathbf{0}$ on a que B est une conséquence logique de A mais $A \wedge B$ n'est pas satisfaisable.
3. Vrai. Dire que $A \wedge \neg B$ n'est pas satisfaisable est équivalent à dire que $\neg(A \wedge \neg B) \equiv (\neg A \vee B) \equiv (A \to B)$ est valide. Et ceci est équivalent à dire que B est une conséquence logique de A.

Bonus Maintenant on regarde la structure de B. On sait que A est déjà en CNF donc il suffit de transformer $\neg B$ en une CNF en préservant la propriété d'être satisfaisable. On peut donc appliquer la méthode de Tseitin. Avant de commencer on peut remarquer que :

$$\neg B \equiv ((x_1 \oplus \neg x_2) \oplus (\neg x_3 \oplus \neg x_4)) \equiv ((x_1 \oplus x_2) \oplus (x_3 \oplus \neg x_4))$$

A cette simplification près, on obtient la formule suivante :

$$A \wedge (w_1 \oplus w_2) \wedge w_1 \leftrightarrow (x_1 \oplus x_2) \wedge w_2 \leftrightarrow (x_3 \oplus \neg x_4)$$

Il reste à exprimer les formules $(w_1 \oplus w_2)$, $w_1 \leftrightarrow x_1 \oplus x_2$ et $w_2 \leftrightarrow (x_3 \oplus \neg x_4)$ comme des formules équivalentes en CNF (on peut utiliser par exemple l'équivalence logique ou les tables de vérité) :

$$
\begin{array}{lcl}
(w_1 \oplus w_2) & \equiv & (w_1 \vee w_2) \wedge (\neg w_1 \vee \neg w_2) \\
w_1 \leftrightarrow (x_1 \oplus x_2) & \equiv & (w_1 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (w_1 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg w_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg w_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \\
w_2 \leftrightarrow (x_3 \oplus \neg x_4) & \equiv & (w_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (w_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg w_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg w_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)\ .
\end{array}
$$