

Contrôle Continu

Consignes. Durée 50'. L'utilisation de tout document ou dispositif électronique est interdite. Vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 Soit $\Sigma = \{\text{nil}^0, b^2\}$ une signature avec un symbole de constante nil et un symbole binaire b . Soient : (i) $\underline{T}_\Sigma$ la Σ -algèbre initiale, (ii) $\underline{A}$ la Σ -algèbre composée de l'ensemble des nombres naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$ avec constante $f_{\text{nil}} = 1$ et fonction binaire $f_b(n, m) = n + m$ (+ est l'addition sur les nombres naturels), (iii) $\underline{B}$ la Σ -algèbre composée de l'ensemble des nombres naturels avec constante $g_{\text{nil}} = 2$ et fonction binaire $g_b(n, m) = n * m$ (* est la multiplication sur les nombres naturels). Combien de morphismes y-a-t-il : (1) entre $\underline{T}_\Sigma$ et $\underline{A}$, (2) entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$ et (3) entre $\underline{B}$ et $\underline{A}$?

Exercice 2 Soit M l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\{a, b\}$. Si w, w' sont des mots alors on écrit ww' pour la concaténation de w avec w' . Soit R une relation binaire sur M définie par :

$$R = \{(w_1aw_2, w_1baw_2) \mid w_1, w_2 \in M\} .$$

Donnez une preuve ou un contre-exemple aux assertions suivantes :

1. La relation R est réflexive.
2. On peut trouver un mot w tel que pour tout mot w' , $(w, w') \notin R$.
3. La relation R est transitive.
4. On peut trouver une suite de mots $w_0, w_1, \dots$ telle que pour tout $i \geq 0$ on a $(w_i, w_{i+1}) \in R$.

Exercice 3 On rappelle que : (i) $A \leftrightarrow B$ est une abréviation pour $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ et (ii) $\equiv$ dénote l'équivalence logique. De suite une liste d'assertions, donnez une preuve de celles qui sont vraies et un contre-exemple pour celles qui sont fausses.

1. Une formule A est valide si et seulement si $\neg A \equiv \mathbf{0}$.
2. Une formule A est satisfaisable si et seulement si $\neg A \equiv \mathbf{1}$.
3. L'opérateur $\leftrightarrow$ est associatif, à savoir : $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z \equiv x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$
4. $\mathbf{0}$ est l'élément neutre pour $\leftrightarrow$, à savoir : $x \leftrightarrow \mathbf{0} \equiv x$.
5. L'opérateur $\leftrightarrow$ est idempotent, à savoir : $(x \leftrightarrow x) \equiv x$.

Exercice 4 La fonction de parité $p : 2^n \rightarrow 2$ est définie par :

$$p(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \mod 2 .$$

Donc la fonction p retourne 1 si et seulement si un nombre impair de ses arguments $x_1, \dots, x_n$ est égal à 1.

1. Pour $n = 3$, construisez une formule en DNF (disjonction de monômes) en 3 variables x_1, x_2, x_3 qui définit la fonction p .
2. Pour un $n \geq 1$ arbitraire, combien de monômes votre formule DNF en n variables qui définit p va-t-elle contenir ?

Solutions

SOLUTION DE L'EXERCICE 1 Points : 5=1+2+2.

1. On sait qu'il y a un morphisme unique de l'algèbre initiale à une autre Σ -algèbre.
2. Un morphisme $h : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ doit satisfaire :

$$h(1) = 2, h(1 + 1) = h(1) * h(1) = 2^2, h(1 + (1 + 1)) = h(1) * h(1 + 1) = 2^3, \dots$$

Par ailleurs, on doit avoir $h(1) = h(1 + 0) = h(1) * h(0)$ ce qui force $h(0) = 1 = 2^0$. Il y a donc un morphisme unique à savoir $h(n) = 2^n$.

3. Il n'y en a pas. Un morphisme $h : \underline{B} \rightarrow \underline{A}$ devrait satisfaire $h(2) = 1$ et par ailleurs on devrait avoir : $h(0) = h(2 * 0) = h(2) + h(0) = 1 + h(0)$ ce qui implique $0 = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2 Points : 6=1+1+2+2.

1. Faux. Par exemple, $(a, a) \notin R$.
2. Vrai. En prenant par exemple $w = b$. D'ailleurs ceci confirme que R n'est pas réflexive.
3. Faux. Par exemple $(a, ba) \in R$ et $(ba, bba) \in R$ mais $(a, bba) \notin R$.
4. Vrai. En prenant $w_i = b^i a$ où $b^i = b \cdots b$, i fois.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3 Points : 5=1+1+1+1+1.

1. Vrai. A valide ssi pour tout v , $\llbracket A \rrbracket v = 1$ ssi pour tout v , $\llbracket \neg A \rrbracket v = 0$ ssi $\neg A \equiv \mathbf{0}$.
2. Faux. Par exemple, $\mathbf{0}$ n'est pas satisfaisable mais $\neg \mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$.
3. Vrai. Par exemple, vérification avec table de vérité (8 cas).
4. Faux. Par exemple, $\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$. Plus en général, $x \leftrightarrow \mathbf{0} \equiv \neg x$.
5. Faux. On a $x \leftrightarrow x \equiv \mathbf{1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4 Points : 4=2+2.

1. $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$.
2. En général, on a 2^{n-1} monômes de n littéraux.