Université Paris Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2007-2008

Partiel

Mardi 6 Novembre 2007

Merci de rédiger chaque exercice sur une feuille séparée, et de noter votre nom sur chaque feuille.

Motivez bien vos réponses. On recommande de *bien lire* l'énoncé d'un exercice avant de commencer à le résoudre. A coté de chaque exercice on donne, à titre indicatif, un barème.

Tout document est autorisé. Les téléphones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'extérieur, doivent être éteints. Le temps à disposition est de 2 heures.

Exercice 1 (6 points)

Soit ϕ une formule de la logique propositionnelle. On rappelle les définitions suivantes :

- *length*(ϕ) dénote le nombre de caractères qui apparaissent dans ϕ (une définition par récurrence a également été donnée en cours),
- $|\phi|_)$ dénote le nombre de parenthèses fermantes qui apparaissent dans ϕ,
- $|\phi|_\neg$ dénote le nombre de symboles de négation qui apparaissent dans ϕ.

Montrer, par induction, que pour toute formule ϕ, on a

$$\mathit{length}(\phi) = 4 \times |\phi|_) + |\phi|_\neg + 1 \ .$$

Exercice 2 (3 points) Soient

$$\begin{aligned} w_1 &= ((x \vee y) \to z) \wedge (x \to \neg y) \\ w_2 &= x \to z \end{aligned}$$

Montrer que $w_1 \models w_2$ mais que $w_2 \not\models w_1$.

Exercice 3 (5 points)

1. Montrer que $\{\to, \oplus\}$ est fonctionnellement complet.
2. En sachant que $\{\neg, \leftrightarrow\}$ n'est pas fonctionnellement complet, montrer que $\{\neg, \oplus\}$ n'est pas fonctionnellement complet.

Exercice 4 (6 points)

Nous disons (pour cet exercice) qu'une formule propositionnelle est en *forme anormale* quand elle ne contient ni une sous-formule de la forme $\neg\neg p$, ni de la forme $(\neg p \vee \neg q)$, ni $(\neg p \wedge \neg q)$.

1. Donner des règles de réécriture qui permettent de transformer toute formule donnée en une formule équivalente en forme anormale. Expliquer, en quelques lignes (pas de preuve formelle),
   (a) pourquoi le processus de réécriture termine toujours,
   (b) pourquoi la formule obtenue à la fin est équivalente à la formule de départ,
   (c) pourquoi la formule obtenue à la fin est en forme anormale.
2. Est-ce qu'il y a deux formules en forme anormale qui sont logiquement équivalentes mais qui diffèrent par plus que seulement les lois de commutativité, d'associativité, et d'idempotence ?