

Examen

Jeudi 17 Janvier 2008

Motivez bien vos réponses. On recommande de *bien lire* l'énoncé d'un exercice avant de commencer à le résoudre. A coté de chaque exercice on donne, à titre indicatif, un barème.

Tout document est autorisé. Les téléphones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'extérieur, doivent être éteints. Le temps à disposition est de 3 heures.

Exercice 1 [4 points] On note $\text{card}(X)$ le nombre d'éléments d'un ensemble fini X . On rappelle que $\mathcal{V}(p)$ est l'ensemble des variables qui paraissent dans la formule propositionnelle p , et que $|p|$ est la longueur d'une formule propositionnelle p . Démontrer par induction que pour toute formule propositionnelle p :

$$\text{card}(\mathcal{V}(p)) \leq |p|$$

Indication : Utiliser le fait que, pour tous ensembles X et Y , $\text{card}(X \cup Y) \leq \text{card}(X) + \text{card}(Y)$.

Exercice 2 [4 points] Appliquez l'algorithme DPLL vu en cours sur la formule suivante. Est-ce que la formule est satisfaisable ? Si oui donner une affectation qui la satisfait.

$$(x_5) \wedge (\neg x_5 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \neg x_3 \vee x_6) \wedge (x_1 \vee \neg x_6) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \\ \wedge (x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1)$$

Exercice 3 [4 points] Dire pour chacune des règles suivantes si elle est correcte ou pas. Si vous pensez qu'une règle est correcte donner une preuve de la correction ; si vous pensez qu'une règle n'est pas correcte donner une instance de la règle dont toutes les hypothèses sont valides et dont la conclusion n'est pas valide (avec explication, mais sans preuve formelle).

1.

$$\frac{\{p_1\} S \{q_1\} \quad \{p_2\} S \{q_2\}}{\{p_1 \wedge p_2\} S \{q_1 \wedge q_2\}}$$

2.

$$\frac{\{p\} S \{q\}}{\{\text{True}\} \text{ if } p \text{ then } S \text{ else } x := 0 \text{ fi } \{q\}}$$

Exercice 4 [3 points] Soit S le programme suivant

```
if y > 0
then x := x+x; y := y+x
else x := y; y := 0
fi
```

1. Calculer avec la méthode vue en cours la plus faible pre-condition de S par rapport à la formule $x \leq y$.
2. Est-ce que la formule $\{\text{True}\} S \{x \leq y\}$ est valide ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 [5 points pour les 3 premières questions] Dans cet exercice on s'intéresse à une variante de la logique de Hoare pour la correction *totale*. Une *formule de correction totale* est de la forme

$$[p] S [q]$$

où $p, q \in BExpr$ et $S \in Imp$. Une affectation $\sigma \in Aff$ satisfait la formule $[p] S [q]$, noté

$$\sigma \models [p] S [q]$$

si

- Si $\sigma \models p$
- alors il existe $\sigma' \in Aff$ telle que $\llbracket S \rrbracket \sigma = \sigma'$, et en plus $\sigma' \models q$.

Une telle formule énonce donc que l'exécution du programme termine quand l'état initial satisfait la pre-condition p , et en plus l'état final satisfait la post-condition q . La formule $[p] S [q]$ est *valide*, noté $\models [p] S [q]$, si $\sigma \models [p] S [q]$ pour toutes $\sigma \in Aff$.

1. Donner un exemple de p, q et S tel que $\{p\} S \{q\}$ est valide et $[p] S [q]$ n'est *pas* valide.
2. Est-il possible que $[p] S [q]$ soit valide mais que $\{p\} S \{q\}$ ne soit pas valide? Justifier votre réponse (une ou deux lignes sont suffisantes).
3. Montrer que la règle suivante est correcte :

$$\frac{[p] S_1 [q] \quad [q] S_2 [r]}{[p] S_1 @ S_2 [r]}$$

4. (Question pour obtenir un bonus) On cherche maintenant une règle pour la correction totale d'une boucle. L'idée est qu'on utilise dans l'hypothèse une expression arithmétique t dont la valeur diminue à chaque exécution du corps de la boucle, et dont la valeur ne doit pas être négative à la fin d'une exécution du corps de la boucle. La bonne règle est obtenue en remplissant les \dots dans le canevas suivant :

$$\frac{[p \wedge \dots] S [p \wedge \dots]}{[p \wedge \dots] \text{ while } f \text{ do } S \text{ od } [p \wedge \dots]} \quad \text{où } \dots$$

Justifier la règle que vous avez trouvée (quelques lignes de texte sont suffisantes pour la justification, une preuve formelle n'est pas demandée).