

Examen

Jeudi 12 Janvier 2012

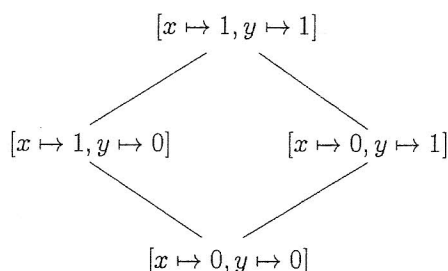
Motivez bien vos réponses. On recommande de *bien lire* l'énoncé d'un exercice avant de commencer à le résoudre. Cet énoncé a 3 pages.

Tout document est autorisé. Les téléphones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'extérieur, doivent être éteints. Le temps à disposition est de 3 heures.

Exercice 1 Formules monotones du calcul propositionnel

Si σ_1 et σ_2 sont deux affectations données, on dit que σ_1 est plus petite que σ_2 , et on écrit $\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$, si pour toute variable x du calcul propositionnel, $\sigma_1(x) \leq \sigma_2(x)$. Autrement dit, σ_1 est plus petite que σ_2 si σ_2 associe la valeur 1 à toutes les variables auxquelles σ_1 associe la valeur 1, et éventuellement à d'autres. Par exemple, $[x \mapsto 1, y \mapsto 0] \sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 1]$, et $[x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 0] \sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 1]$, mais $[x \mapsto 1, y \mapsto 1] \not\sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 0]$. (rappel : ces affectations associent la valeur 0 à toutes les variables qui n'apparaissent pas dans la liste.)

Voici représentée graphiquement la relation $\sqsubseteq$ sur les 4 affectations différentes pour les variables x et y (un trait entre deux affectations signifie que la première, celle placée plus bas dans le dessin, est plus petite que la deuxième).



Une formule ϕ du calcul propositionnel est *monotone* si pour toute paire d'affectations σ_1, σ_2 , si $\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$, alors la valeur de vérité $\llbracket \phi \rrbracket_{\sigma_1}$ est plus petite que (ou égale à) la valeur de vérité $\llbracket \phi \rrbracket_{\sigma_2}$. Autrement dit, ϕ est monotone si

$$\text{pour tout } \sigma_1, \sigma_2, \text{ si } \sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2 \text{ alors } \llbracket \phi \rrbracket_{\sigma_1} \leq \llbracket \phi \rrbracket_{\sigma_2}$$

1. Représenter graphiquement la relation $\sqsubseteq$ sur les 8 affectations différentes pour les variables x, y et z , comme dans la figure ci-dessus.
2. Montrer que la formule $((x \vee y) \wedge z)$ est monotone (indication : dans le dessin du point précédent, écrire à côté de chaque affectation la valeur de vérité de la formule relativement à l'affectation en question, et conclure.)
3. Montrer que la formule $((x \vee y) \wedge \neg z)$ n'est pas monotone.
4. Donnez en exemple, aussi simple que possible, de formule monotone de la forme $\neg \phi$.
5. Si ϕ est monotone, alors $\neg \phi$ ne l'est pas. Prouver cet énoncé, ou donner un contre-exemple.
6. On considère le calcul propositionnel *privé de la négation*. Formellement, soit $\overline{Form}$ le plus petit ensemble de chaînes de caractères tel que :

- $V \subseteq \overline{Form}$
- Si $\phi, \psi \in \overline{Form}$ alors $(\phi \wedge \psi) \in \overline{Form}$
- Si $\phi, \psi \in \overline{Form}$ alors $(\phi \vee \psi) \in \overline{Form}$

Les notions d'affectation, d'interprétation etc. pour les formules de $\overline{Form}$ sont les mêmes que celles définies pour les formules correspondantes de $Form$.

Montrer par induction sur les éléments de l'ensemble $\overline{Form}$ que toutes les formules de ce calcul restreint sont monotones.

Exercice 2 Les Club des Amis de l'Europe a trois catégories de membres :

- Des Français : Anne, Béatrice, Claudine
- Des Allemands : Dieter, Erika, Franz
- Des Italiens : Giovanni, Ilaria, Luca

On cherche à prendre plusieurs photos des membres du club. Sur toute photo doivent figurer exactement un Français, un Allemand, et un Italien. Tout membre du club doit figurer sur au moins une photo ; il est permis aux membres du club de figurer sur plusieurs photos. On appelle un *planning* une liste de triplets de personnes qui vont figurer sur les photos.

1. Afin de modéliser le problème définir d'abord un ensemble de variables propositionnelles, et dire (une phrase en français) quelle est la signification des variables. Donner une formule propositionnelle telle que toute solution de la formule correspond à un planning, et inversement.
2. Ajouter des formules propositionnelles pour imposer les contraintes suivantes :
 - On veut avoir au moins une photo sur laquelle il y a Anne et Erika ensemble.
 - Franz et Luca refusent de figurer ensemble sur une photo.
3. Ajouter une formule propositionnelle pour imposer la contrainte : sur toute photo où il y a Claudine il y a également Ilaria.
4. Ajouter une formule propositionnelle pour imposer la contrainte : S'il y a une photo sur laquelle Franz et Luca sont ensemble, alors il y doit aussi exister une photo sur laquelle il y a Béatrice et Luca ensemble.

Il n'est pas nécessaire que les formules soient en forme conjonctive normale.

Exercice 3 Les formules de Hoare suivantes sont-elles valides ?

- Dans le cas positif, vous devez donner une preuve sémantique de quelques lignes ou une preuve utilisant le calcul de Hoare.
- Dans le cas négatif, vous devez donner une affectation qui rend la formule fausse et expliquer brièvement pourquoi.

1. $\{z = (x - y)\} \text{ if } z < 0 \text{ then } x := x - 1 \text{ else } y := y - 1 \text{ fi } \{(x - y) > z\}$
2. $\{x > 0 \wedge y > 0\} \text{ while } x > 0 \text{ do } x := x + y \text{ od } \{\text{False}\}$
3. $\{a = 3 * q\} x := 2; \text{ while } x > 0 \text{ do } a := a - q; x := x - 1 \text{ od } \{a = 0\}$

Exercice 4 Dire pour chacune des règles suivantes si elle est correcte ou pas. Justifiez vos réponses : si vous pensez que la règle n'est pas correcte, donnez une de ses instances qui n'est pas correcte ; si vous pensez que la règle est correcte, donnez une preuve de sa correction.

1.

$$\frac{\{p_1\} S \{q_1\} \quad \{p_2\} S \{q_2\}}{\{p_1 \wedge p_2\} S \{q_1 \wedge q_2\}}$$

2.

$$\frac{\{p \wedge b\} S_1 \{q\} \quad \{p \wedge \neg b\} S_2 \{q\}}{\{p\} \text{ if } b \wedge c \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi } \{q\}}$$

3.

$$\frac{\{p\} S \{p\}}{\{p\} \text{ while } b \text{ do } S; S; S \text{ od } \{p \wedge \neg b\}}$$