

Examen

Jeudi 13 Janvier 2011

Motivez bien vos réponses. On recommande de *bien lire* l'énoncé d'un exercice avant de commencer à le résoudre. Cet énoncé a 2 pages.

Tout document est autorisé. Les téléphones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'extérieur, doivent être éteints. Le temps à disposition est de 3 heures.

Exercice 1 Nous disons (pour cet exercice) qu'une formule propositionnelle est en *forme anormale* quand elle ne contient ni une sous-formule de la forme $\neg\neg p$, ni de la forme $(\neg p \vee \neg q)$, ni $(\neg p \wedge \neg q)$.

Par exemple, les deux formules suivantes sont en forme anormale :

$$\neg(x \wedge (y \vee z))$$
$$(\neg x \wedge y) \vee (z \wedge \neg x)$$

tandis que les deux formules suivantes ne le sont pas :

$$x \wedge (\neg(y \wedge x) \vee \neg z)$$
$$x \vee \neg\neg(y \wedge (z_1 \vee z_2))$$

1. Donner des règles de réécriture qui permettent de transformer toute formule donnée en une formule équivalente en forme anormale. Expliquer, en quelques lignes (pas de preuve formelle),
 - (a) pourquoi le processus de réécriture termine toujours,
 - (b) pourquoi la formule obtenue à la fin est équivalente à la formule de départ,
 - (c) pourquoi la formule obtenue à la fin est en forme anormale.
2. Est-ce qu'il y a deux formules en forme anormale qui sont logiquement équivalentes mais qui diffèrent par plus que seulement les lois de commutativité, d'associativité, et d'idempotence ?

Exercice 2 On cherche à planifier un colloque. Le colloque consiste en 10 exposés, nommés $E_1, \dots, E_{10}$, qui ont tous la même durée. Le temps total disponible est coupé en 10 créneaux horaires. On a la contrainte supplémentaire que E_3 ne doit pas être le premier exposé du colloque, et que E_2 doit avoir lieu avant E_4 . Pour cet exercice, *avant* et *après* sont à comprendre au sens large, c.-à-d. pas nécessairement immédiatement avant ou après.

1. Pour la première et deuxième question on dispose d'une seule salle de conférence. Donner une formule propositionnelle qui est vraie si et seulement si il existe une répartition des 10 exposés sur les 10 créneaux horaires qui satisfait toutes les contraintes. Il convient de considérer des variables $[i, j]$, exprimant que l'exposé E_i aura lieu pendant le créneau numéro j .
2. Ajouter la contrainte supplémentaire : Soit les deux exposés E_1 et E_2 ont lieu tous les deux avant E_5 , soit E_1 et E_2 ont lieu tous les deux après E_5 .

3. Pour cette troisième question on dispose de deux salles de conférences qui sont identiques. Les exposés peuvent avoir lieu au même temps dans les deux salles, sauf que E_4 et E_8 ne doivent pas avoir lieu au même temps.

Est-il nécessaire de considérer des variables propositionnelles différentes de celles des deux premières questions ? Dire comment la formule pour cette variante est différente de la formule obtenue à la question 2 (il est inutile de recopier toute la formule).

Il n'est pas demandé de résoudre le problème mais de construire les formules propositionnelles. Toutes les formules doivent être en forme conjonctive normale.

Exercice 3 Dites pour chacune des formules de Hoare suivantes si elle est valide ou pas. Si vous pensez que la formule est valide vous pouvez donner une preuve utilisant le calcul de Hoare, ou bien une preuve sémantique. Si vous pensez que la formule n'est pas valide donnez une valuation qui rend la formule fausse, et expliquez brièvement en français.

1. $\{x \leq 0\}$ **if** $x < y$ **then** $y := y - x$ **else** $y := x - y$ **fi** $\{y \geq x\}$
2. $\{x \geq 0\}$ **while** $x > 0$ **do** $y := y - 1; x := x + 1$ **od** $\{x = 0\}$
3. $\{z = x \wedge y \geq 0\}$ **while** $y > 0$ **do** $y := y - 1; x := x + 1$ **od** $\{x = y + z\}$

Exercice 4

1. Calculer avec la méthode vue en cours la plus faible pre-condition du programme $c := x; p := 0$ par rapport à la formule $p = x * (x - c) \wedge c \geq 0$.
2. Calculer avec la méthode vue en cours la plus faible pre-condition du programme $p := p + x; c := c - 1$ par rapport à la formule $p = x * (x - c) \wedge c \geq 0$.
3. Soit G le programme suivant :

```

c := x;
p := 0;
while c > 0 do
  p := p + x;
  c := c - 1;
od

```

Donner une preuve dans le calcul de Hoare de la formule

$$\{x \geq 0\} G \{p = x * x\}$$

Vous avez le droit d'utiliser les réponses aux questions (1) et (2) dans la preuve.

Exercice 5 Dire pour chacune des règles suivantes si elle est correcte ou pas. Justifiez vos réponses : si vous pensez que la règle n'est pas correcte, donnez une de ses instances qui n'est pas correcte ; si vous pensez que la règle est correcte, donnez une preuve de sa correction.

1.

$$\frac{\{p\} S_1 \{q\} \quad \{p\} S_1; S_2 \{r\}}{\{q\} S_2 \{r\}}$$

2.

$$\frac{\{\text{True}\} S_1 \{q\} \quad \{\text{True}\} S_2 \{q\}}{\{p\} \text{ if } r \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi } \{q\}}$$

3.

$$\frac{\{p\} \text{ while } q \text{ do } S \text{ od } \{p \wedge \neg q\}}{\{p \wedge q\} S \{p\}}$$