Université Paris Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2008-2009

Partiel

Mardi 4 Novembre 2008

Merci de rédiger chaque exercice sur une feuille séparée, et de noter votre nom sur chaque feuille.

Motivez bien vos réponses. On recommande de *bien lire* l'énoncé d'un exercice avant de commencer à le résoudre. A coté de chaque exercice on donne, à titre indicatif, un barème.

Tout document est autorisé. Les téléphones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'extérieur, doivent être éteints. Le temps à disposition est de 2 heures.

Exercice 1 [3 points]

1. Soit
$$p_1 = (\neg(\neg(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4)))$$
Mettre p_1 en forme normale de négation.
2. Soit
$$p_2 = ((x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z))$$
Mettre p_2 en forme disjonctive normale. On autorise de simplifier des clauses en remplacant plusieurs occurrences du même littéral dans une clause par une seule occurrence (par exemple de simplifier $(x \wedge x \wedge y)$ en $(x \wedge y)$)
3. Dans la forme disjonctive normale de la formule p_2 obtenue à la question précédente supprimer toutes les clauses qui subsument une autre clause.

Exercice 2 [7 points]

1. Soit t: *Form* $\rightarrow$ *Form* la fonction qui change tous les $\wedge$ en $\vee$. Par exemple, $t: \wedge \rightarrow \vee$
$$t((x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_4)) = ((x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee \neg x_4))$$
$t(x) = x$
$t(\neg p) = \neg t(p)$
$t(p \wedge q) = t(p) \vee t(q)$
$t(p \vee q) = t(p) \vee t(q)$
Donner une définition récursive de la fonction t.
2. Soit la fonction ϕ: *Form* $\rightarrow \mathbb{N}$ définie par récurrence :
$$\begin{array}{rcll} \phi(x) & = & 1 & \text{si } x \in V \\ \phi(\neg p) & = & \phi(p) & \\ \phi((p \wedge q)) & = & 2 * (\phi(p) + \phi(q)) & \\ \phi((p \vee q)) & = & \phi(p) + \phi(q) & \end{array}$$
Quelle est la valeur de $\phi(((\neg x \vee y) \wedge \neg z))$? =6
3. Montrer par induction que $\phi(p) \geq 1$ pour tout $p \in$ *Form*.
4. Montrer par induction que $\phi(t(p)) \leq \phi(p)$ pour tout $p \in$ *Form*.

Tourner la page s.v.p.

Exercice 3 [4 points]

1. Montrer que $((x \vee y) \wedge (\neg x \vee z)) \models (y \vee z)$
2. Est-ce qu'on a que $((x \vee y) \wedge (\neg x \vee z)) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (y \vee z)$?
3. Montrer que *pour toutes formules* p, q, et r on a que $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \models (q \vee r)$

Exercice 4 [6 points] Le centre social Denis Diderot organise des cours de Tango, Piano, Yoga et Escalade. Amira s'est inscrite pour Tango et pour Yoga, Barbara pour Escalade, Charles pour Yoga et Piano, Dédé pour Yoga et Escalade, Frank pour Escalade et Piano. On veut organiser les cours pendant les deux jours du weekend de façon que chaque étudiant n'aie pas plus qu'un cours par jour. Pour un même cours on ne peut pas avoir plus qu'une séance par weekend.

Pour chaque matière m et chaque jour du weekend j on considère une variable propositionnelle $x_{m,j}$.

En utilisant ces variables, écrire une formule de la logique propositionnelle qui modélise le problème et qui est satisfaisable si et seulement si le problème a une solution. Expliquer comment on pourrait obtenir un emplois du temps à partir d'une affectation qui satisfait la formule.

A → T, Y
B → E
C → Y, P
D → Y, E
F → E, P