

Examen

Jeudi 15 Janvier 2009

Motivez bien vos réponses. On recommande de *bien lire* l'énoncé d'un exercice avant de commencer à le résoudre. A coté de chaque exercice on donne, à titre indicatif, un barème.

Tout document est autorisé. Les téléphones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'extérieur, doivent être éteints. Le temps à disposition est de 3 heures.

Exercice 1 [4 points]

1. Montrer que $\neg x \models x \rightarrow \text{False}$
2. Définir par récurrence une fonction f qui remplace chaque occurrence de l'opérateur $\neg$ par $\rightarrow \text{False}$. Par exemple $f(\neg(x \wedge \neg y)) = (x \wedge (y \rightarrow \text{False})) \rightarrow \text{False}$.
3. Montrer par induction que pour toute formule p on a $f(p) \models p$.

Exercice 2 [3 points]

1. En utilisant l'algorithme DPLL, dire si la formule suivante est satisfaisable. Si oui, donner une affectation qui la satisfait.

$$\begin{aligned} & (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_6) \wedge (x_2 \vee \neg x_5 \vee x_6) \\ & \wedge (\neg x_3 \vee x_5 \vee \neg x_6) \wedge (x_6 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge \neg x_1 \wedge (\neg x_5 \vee \neg x_6) \end{aligned}$$

2. Expliquer comment on peut utiliser l'algorithme DPLL pour vérifier la validité d'une formule en forme normale disjonctive.

Exercice 3 [4 points] Soit la formule de Hoare suivante :

$$\{j < i\} \text{ while } j < i \text{ do } j := j + 1 \text{ od } \{j = i\}$$

1. Expliquer informellement pourquoi cette formule est valide.
2. Donner une preuve de cette formule avec le calcul de Hoare.

Exercice 4 [5 points]

1. Calculer avec la méthode vue en cours la plus faible pre-condition du programme $s := 0; j := 0$ par rapport à la formule $s = j * (j + 1)$.
2. Calculer avec la méthode vue en cours la plus faible pre-condition du programme $j := j + 1; s := s + (2 * j)$ par rapport à la formule $s = j * (j + 1)$.
3. Soit G le programme suivant :

```
s := 0;
j := 0;
while j ≠ i do
  j := j+1;
  s := s+(2*j)
od
```

Donner une preuve dans le calcul de Hoare de la formule

$$\{\text{True}\} G \{s = i * (i + 1)\}$$

Vous avez le droit d'utiliser les réponses aux questions (1) et (2) dans la preuve.

Exercice 5 [4 points] Dire pour chacune des deux règles suivantes si elle est correcte pas. Justifiez vos réponses : si vous pensez que la règle est fausse donnez une instance de a règle qui est n'est pas valide ; si vous pensez que la règle est valide donnez une preuve.

1.

$$\frac{\{p\} \text{ if } e \text{ then } S \text{ fi } \{q\}}{\{p \wedge e\} S \{q\}}$$

2.

$$\frac{\{p\} \text{ while } e \text{ do } S \text{ od } \{q\}}{\{p \wedge e\} S \{q\}}$$