Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

Année 2017/18
LO3 – L2 1er semestre

Examen du 21 juin 2018

Durée : 3 heures

Calculatrices, téléphones cellulaires et documents interdits

Questions de cours

1. Expliquer la relation $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$. Comment appelle-t-on les éléments de cet ensemble ?
2. Énoncer le théorème de compacité de la logique propositionnelle.

Logique du premier ordre

Exercice 1 On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer les assertions suivantes dans le langage du premier ordre $\mathcal{L} = (f, \leqslant)$.

1. La fonction f est constante.
2. La fonction f est bornée.
3. La fonction f est monotone.
4. $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 On se place dans le langage du premier ordre $\mathcal{L} = (f, g)$, où f et g sont des symboles de fonction binaires, et on considère la formule de $\mathcal{L}$:

$$F \;=\; \exists x \forall y (=(f(g(x,y),x),y) \to =(x,y))\,.$$

Soit $t[x,y]$ le terme $f(g(x,y),x)$, $E[x,y]$ la formule $=(t[x,y],y)$, $G[x,y]$ la formule $(E[x,y] \to =(x,y))$ et $H[x]$ la formule $\forall y\, G[x,y]$. La formule $\exists x\, H[x]$ est donc exactement F.

1. Déterminer l'arbre des sous-termes du terme $t[x,y]$, puis l'arbre syntaxique de $t[x,y]$.
2. Déterminer l'arbre des sous-formules de la formule F, puis l'arbre syntaxique de F.

On considère la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} = \langle M; f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}} \rangle$ dont le domaine est $M = \{-1, 0, 1\}$ et où les symboles de fonction f, g ont comme interprétations les applications $f^{\mathfrak{M}} : M^2 \to M$ et $g^{\mathfrak{M}} : M^2 \to M$ définies par $f^{\mathfrak{M}}(a,b) = \min(a,b)$ et $g^{\mathfrak{M}}(a,b) = ab$.

3. Préciser dans un tableau comme ci-dessous, *à reproduire sur la copie d'examen*, l'interprétation $t^{\mathfrak{M}}[a,b]$ du terme $t[x,y]$ lorsque le couple (a,b) décrit M^2.

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|}
 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{b}} \\
\cline{3-5}
 & & -1 & 0 & 1 \\
\cline{2-5}
\multirow{3}{*}{$a\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\-1\end{array}}\right.$} & 1 & & & \\
\cline{2-5}
 & 0 & & & \\
\cline{2-5}
 & -1 & & & \\
\cline{2-5}
\end{array}
$$

4. Déterminer l'ensemble des couples (a,b) de M^2 tels que $\mathfrak{M} \models E[a,b]$, puis l'ensemble des couples $(a,b) \in M^2$ tels que $\mathfrak{M} \models G[a,b]$.
5. En déduire l'ensemble des éléments a de M tels que $\mathfrak{M} \models H[a]$.
6. Déterminer si la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ satisfait la formule F ou non.

Exercice 3 On se place ici dans le langage $\mathcal{L} = (P)$ doté du seul symbole de prédicat binaire P. Définir, dans chacun des cas suivants, une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}_i$ qui satisfait la formule F_i, mais pas la formule G_i.

1. $F_1 = \forall x \exists y\, P(x,y)$ $\qquad$ $G_1 = \exists y \forall x\, P(x,y)$
2. $F_2 = \forall x \forall y \forall z\, ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z))$ $\qquad$ $G_2 = \forall x \forall y\, (P(x,y) \vee P(y,x))$
3. $F_3 = \forall x \forall y\, (P(x,y) \vee P(y,x))$ $\qquad$ $G_3 = \forall x \forall y \forall z\, ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z))\,.$

Cardinalité

Exercice 4 Le but de cet exercice est d'établir qu'un ensemble non vide E admet une partition $\{P_1, P_2\}$ où P_1 et P_2 sont équipotents à E si et seulement si $\mathbb{N} \times E$ est équipotent à E.

A. Commençons par supposer qu'il existe une partition $\{P_1, P_2\}$ de E comme ci-dessus, autrement dit telle qu'il existe des bijections $f : E \to P_1$ et $g : E \to P_2$.

1. Justifier le fait que f et g sont alors des injections de E dans E telles que $f(E) \cap g(E) = \varnothing$.

On définit l'application $\Phi : \mathbb{N} \times E \to E$ en posant $\Phi(n, x) = f^n(g(x))$, où $f^n \stackrel{\text{déf}}{=} \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}$ (avec par convention $f^0 = \mathrm{Id_E}$, $f^1 = f$).

2. Montrer que les fonctions $f^n : E \to E$ sont injectives par récurrence sur n.
3. En déduire que $n < n'$ entraîne $\Phi(n, x) \neq \Phi(n', x')$ pour tous $x, x' \in E$.
4. Montrer que l'application Φ est injective.
5. Expliciter cette application Φ lorsque $E = \mathbb{N}$ et que $f, g : E \to E$ sont définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 2x + 1$. L'application Φ est-elle bijective dans ce cas ?
6. Montrer soigneusement à l'aide des questions précédentes et du théorème de Cantor-Bernstein que $\mathbb{N} \times E$ est équipotent à E.

B. Supposons réciproquement que $\mathbb{N} \times E$ est équipotent à E. Soit donc Ψ une bijection de $\mathbb{N} \times E$ sur E.

7. Expliciter une bijection H de $\mathbb{N} \times E$ sur $\mathbb{N}^* \times E$, puis définir à l'aide de Ψ et de H une bijection de l'ensemble E sur sa partie $\Psi(\mathbb{N}^* \times E)$.
8. En déduire une partition $\{P_1, P_2\}$ de E telle que P_1 et P_2 sont équipotents à E.

Logique propositionnelle

Exercice 5 On note $n(F)$ le nombre d'occurrences du symbole de négation $\neg$ dans une formule propositionnelle F et $\lg(F)$ sa longueur. Montrer que la somme $\lg(F) + n(F)$ est toujours impaire, par induction structurelle sur la formule F.

Exercice 6 Appelons *taille d'une clause* le nombre de littéraux dont elle est la disjonction et *taille d'une* FNC (= forme normale conjonctive) la somme des tailles des clauses dont elle est la conjonction.

1. Déterminer une FNC de taille minimale de la formule $(A \leftrightarrow B)$, où A et B sont des variables propositionnelles.
2. Cette FNC de taille minimale est-elle unique à l'ordre près de ses clauses et à celui des littéraux dans ses clauses ?
3. Reprendre les deux questions précédentes pour la formule $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C))$.

Exercice 7 Donner, en Déduction Naturelle, une démonstration formelle sans aucune hypothèse de chacune des tautologies :

- $((A \wedge B) \to (A \vee B))$
- $((A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C))$
- $(((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C))$
- $(\neg\neg A \to A)$.