

Examen partiel du 28/10/2017

Exercice 1 Parmi les huit ensembles suivants, déterminer lesquels sont égaux :

$$\begin{array}{cccc} \{1\} & \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f > 0\} & \bigcap_{x \in]0, +\infty[}]0, x] & \prod_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \\ \{\text{Id}_{\mathbb{R}}\} & \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f > \text{Id}_{\mathbb{R}}\} & \bigcap_{x \in]1, +\infty[}]1/x, x] & \prod_{x \in \mathbb{R}}]x, +\infty[. \end{array}$$

[Indication. Certains peuvent être égaux dans une même ligne.]

Exercice 2 Soit E une partie de $\mathbb{R}$ close pour la multiplication (c.-à-d. telle que $a, b \in E \Rightarrow ab \in E$) et telle que $\{0, 1\} \subseteq E$. On définit une relation $|$ sur E en posant pour tous $a, b \in E$:

$$a | b \stackrel{\text{déf}}{\iff} \exists k \in E \quad ak = b.$$

On définit une autre relation $\sim$ sur E en posant pour tous $a, b \in E$:

$$a \sim b \stackrel{\text{déf}}{\iff} a | b \text{ et } b | a.$$

On note enfin $\bar{a} \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in E \mid x \sim a\}$ pour tout $a \in E$.

1. Montrer que la relation $|$ est un préordre sur E , puis que : $a | b$ et $a' | b' \implies aa' | bb'$ pour tous a, b, a', b' de E .
2. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E .
3. Montrer que la relation $|$ est compatible avec $\sim$ (c.-à-d. que $a | b \iff a' | b'$ pour tous $a, a', b, b' \in E$ tels que $a \sim a'$ et $b \sim b'$), puis que la relation quotient $\tilde{|} \stackrel{\text{déf}}{=} | / \sim$ est un ordre sur l'ensemble $E / \sim$.
4. Montrer que cet ordre $\tilde{|}$ sur $E / \sim$ possède un plus petit élément ainsi qu'un plus grand élément en précisant lesquels.
5. Montrer que la multiplication usuelle $\times : E^2 \rightarrow E$, à savoir $(a, b) \mapsto ab$, est compatible avec $\sim$ (c.-à-d. $a \sim a'$ et $b \sim b' \implies ab \sim a'b'$).

On note $\tilde{\times}$ l'application quotient $(E / \sim)^2 \rightarrow E / \sim$ qui en résulte.

6. Montrer que l'opération $\tilde{\times}$ est commutative, associative et qu'elle possède un élément neutre.
7. Déterminer l'ensemble quotient $E / \sim$ lorsque $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Exercice 3 On se propose ici de démontrer le théorème de maximalité de Hausdorff :

Théorème (Hausdorff) Tout ensemble ordonné possède une chaîne maximale pour l'inclusion.

Soit donc une relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble E . On note $\mathbf{K}$ l'ensemble des chaînes de E , autrement dit des parties C de E telles que pour tous $x, y \in C$: $x \leq y$ ou $y \leq x$.

1. Montrer que $\subseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{K}$.
2. Montrer que pour toute chaîne $\mathcal{C}$ de $\mathbf{K}$ (c.-à-d. une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbf{K}$ telle que $C \subseteq C'$ ou $C' \subseteq C$ pour tous $C, C' \in \mathcal{C}$), on a :

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathbf{K}.$$

3. En déduire, à l'aide du lemme de Zorn, que E possède une chaîne maximale pour la relation $\subseteq$.

Exercice 4 Soit une surjection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ quelconque et $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par $\psi(n, x) = n + (1 + e^x)^{-1}$. On définit encore l'application $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ par :

$$\Phi(f) = \psi(\{(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid \varphi(n) < f(x)\}).$$

1. Justifier rapidement à l'aide de théorèmes du cours qu'il existe bien une surjection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$.
2. Montrer que l'application $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.
3. Montrer que $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est injective.
4. Déterminer une injection $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5. Montrer que les ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont équipotents.

Exercice 5 On se place ici dans le langage du 1^{er} ordre $\mathcal{L} = (0, s, +, \times, N, C, P, \mathbb{P}, >, |, \equiv)$ vu en cours et permettant d'exprimer des énoncés sur les nombres entiers naturels (les quantifications absolues $\forall x, \exists x$ signifient donc ici : « pour tout entier naturel x », « il existe un entier naturel x tel que »). On rappelle le sens des symboles spécifiques à ce langage $\mathcal{L}$: 0 = « zéro », s = « successeur », $+$ = « somme », $\times$ = « produit », N = « s'annule », C = « est un carré », P = « est premier », $\mathbb{P}$ = « est premier avec », $>$ = « excède », $|$ = « divise », $\equiv$ = « est congru à ... modulo ... » (les symboles de fonction $+$ et $\times$ sont d'arité 2). On rappelle enfin qu'outre ces symboles propres à $\mathcal{L}$, on peut utiliser le symbole de prédicat $=$ (« égale »), puisqu'il s'agit d'un symbole logique au même titre que les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ et les quantificateurs $\forall, \exists$.

1. Déterminer pour chacune des suites de symboles ci-dessous si c'est une formule du langage $\mathcal{L}$. Si oui, expliciter en langue courante le sens de la formule. Si non, expliquer brièvement pourquoi.
 - (a) $\forall x N(x)$
 - (b) $\forall x s(x) > x$
 - (c) $\forall x \forall y (|(x, y) \rightarrow |(x, \times(y, z)))$
 - (d) $\forall x =(+ (x, s(s(s(0)))) , s(s(s(x))))$
2. Exprimer par des formules du langage $\mathcal{L}$ les faits suivants (portant sur les entiers naturels).
 - (a) Pour tout $z > 0$ et tout x , il existe $y < z$ tel que $x \equiv y [z]$.
 - (b) Il n'existe pas de nombres distincts x, y tels que $x + y = xy$.
 - (c) Le produit de deux nombres non nuls ne s'annule jamais.
 - (d) Deux nombres consécutifs sont toujours premiers entre eux.