Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

Année 2017/18
LO3 – L2 1er semestre

Examen du 11 janvier 2017

Durée : 3 heures

Calculatrices, téléphones cellulaires et documents interdits

Questions de cours

1. Qu'est-ce que le cardinal $\aleph_0$?
2. Rappeler la définition de l'ensemble $\prod_{i \in I} A_i$, où $(A_i)_{i \in I}$ est une famille non vide d'ensembles.

Exercice 1 Dans cet exercice, on se propose de démontrer qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ dénombrable d'ensembles A_i dénombrables a une réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ dénombrable. Puisque cette famille $(A_i)_{i \in I}$ est dénombrable, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$, et comme chaque ensemble A_i est aussi dénombrable, il existe une bijection $\psi_i : \mathbb{N} \to A_i$. Pour tout $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, soit $\mu(x) \in \mathbb{N}$ le plus petit entier naturel n tel que $x \in A_{\varphi(n)}$. On définit l'application $F : \bigcup_{i \in I} A_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $F(x) = \big(\mu(x), \psi^{-1}_{\varphi(\mu(x))}(x)\big)$.

1. Montrer que F est une injection.
2. Donner la définition d'une injection $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, puis celle d'une injection $\bigcup_{i \in I} A_i \to \mathbb{N}$.
3. Vérifier que pour tout $i \in I$, ψ_i est une injection $\mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$, puis, à l'aide d'un théorème que l'on précisera, que la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ est bien dénombrable.

Logique du premier ordre

Exercice 2 On se place dans le langage du premier ordre $\mathcal{L} = (f, g, P)$, où f est un symbole de fonction binaire, g un symbole de fonction unaire, P un symbole de prédicat binaire, et on considère la formule de $\mathcal{L}$:

$$F \; = \; \forall x \exists y (P(x, y) \to {=}(f(g(x), y), x)) \, .$$

Soit $t[x, y]$ le terme $f(g(x), y)$, $E[x, y]$ la formule $=(t[x, y], x)$, $G[x, y]$ la formule $(P(x, y) \to E[x, y])$ et $H[x]$ la formule $\exists y \, G[x, y]$. La formule $\forall x \, H[x]$ est donc exactement F.

1. Déterminer l'arbre des sous-formules de la formule F, puis l'arbre syntaxique de F.

On considère la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} = \langle M; f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}, P^{\mathfrak{M}} \rangle$, dont le domaine est $M = \{0, 1, 2\}$, dont les interprétations des symboles de fonction $f^{\mathfrak{M}} : M^2 \to M$ et $g^{\mathfrak{M}} : M \to M$ sont respectivement définies par $f^{\mathfrak{M}}(a, b) = \max(a, b)$ et $g^{\mathfrak{M}}(a) = 2 - a$, et dont l'interprétation du symbole de prédicat P est $P^{\mathfrak{M}} = M^2 \setminus \{(0, 0), (2, 2)\}$.

2. Consigner dans un tableau comme ci-dessous (à reproduire sur la copie d'examen), l'interprétation $t^{\mathfrak{M}}[a, b]$ du terme $t[x, y]$ lorsque le couple (a, b) décrit M^2.

			b	
		0	1	2
a	0			
	1			
	2			

3. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) de M^2 tels que $\mathfrak{M} \models E[a, b]$, puis l'ensemble des couples $(a, b) \in M^2$ tels que $\mathfrak{M} \models G[a, b]$.
4. En déduire l'ensemble des éléments a de M tels que $\mathfrak{M} \models H[a]$.
5. Déterminer si la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ satisfait la formule F ou non.

Exercice 3 On se place ici dans le langage $\mathcal{L} = (f)$ doté du seul symbole de fonction binaire f. Définir, dans chacun des cas suivants, une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}_i$ qui satisfait la formule F_i, mais pas la formule G_i.

1. $F_1 = \forall x \forall y \forall z \, {=}(f(f(x, y), z), f(x, f(y, z)))$ $\quad G_1 = \forall x \forall y \, {=}(f(x, y), f(y, x))$
2. $F_2 = \forall x \forall y \, {=}(f(x, y), f(y, x))$ $\quad G_2 = \exists y \forall x \, {=}(f(x, y), x)$
3. $F_3 = \exists y \forall x \, {=}(f(x, y), x)$ $\quad G_3 = \forall x \forall y \forall z \, {=}(f(f(x, y), z), f(x, f(y, z)))$.

Exercice 4 On se place maintenant dans le langage du premier ordre $\mathcal{L} = (f, P)$, où f est un symbole de fonction unaire et P un symbole de prédicat binaire. Donner, dans chacun des cas suivants, une formule close F_i du langage $\mathcal{L}$ vraie dans la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{A}_i$ et fausse dans la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{B}_i$.

1.	$\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{R}\,;\, \exp,\, \leqslant \rangle$	$\mathfrak{B}_1 = \langle \mathbb{R}\,;\, x \mapsto x^2+1,\, \leqslant \rangle$
2.	$\mathfrak{A}_2 = \langle \mathbb{R}\,;\, \exp,\, \leqslant \rangle$	$\mathfrak{B}_2 = \langle \mathbb{R}\,;\, x \mapsto x^3,\, \leqslant \rangle$
3.	$\mathfrak{A}_3 = \langle \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \frac{1}{1+x^2},\, \leqslant \rangle$	$\mathfrak{B}_3 = \langle \mathbb{R}\,;\, \cos,\, \leqslant \rangle$
4.	$\mathfrak{A}_4 = \langle \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \sqrt[3]{x},\, \leqslant \rangle$	$\mathfrak{B}_4 = \langle \mathbb{R}\,;\, x \mapsto x^3,\, \leqslant \rangle$
5.	$\mathfrak{A}_5 = \langle \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \lvert x \rvert,\, \leqslant \rangle$	$\mathfrak{B}_5 = \langle \mathbb{R}\,;\, x \mapsto x^2,\, \leqslant \rangle$.

Logique propositionnelle

Dans la suite, $\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des formules propositionnelles défini, comme dans le cours, à partir d'un ensemble arbitraire $\mathscr{P}$ de variables propositionnelles. (Les formules de $\mathscr{F}$ utilisent les symboles logiques $\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.)

Exercice 5 Montrer par induction structurelle sur la formule $F \in \mathscr{F}$ qu'il existe une formule G sans occurrence des symboles $\bot, \vee, \leftrightarrow$ telle que $F \equiv G$. Qu'en déduit-on concernant l'ensemble des connecteurs logiques $\{\neg, \wedge, \rightarrow\}$?

Exercice 6 Dans cet exercice, on fixe $\mathscr{P} = \{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et on note une distribution de valeurs de vérité $\delta \in \{0,1\}^{\mathscr{P}}$ comme la suite $\big(\delta(P_0), \delta(P_1), \delta(P_2), \dots\big)$. Soit les distributions de valeurs de vérité :

$$\delta_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, 1, 1, 1, 1, \dots) \ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \text{ et } \quad \delta_\infty = (0, 0, 0, 0, \dots).$$

Enfin, pour tout ensemble de formules $\mathscr{T}$, on pose $\Delta(\mathscr{T}) = \big\{\delta \in \{0,1\}^{\mathscr{P}} \;\big|\; \delta \vDash \mathscr{T}\big\}$.

1. Décrire les éléments de $\Delta(\mathscr{H})$ pour $\mathscr{H} = \{P_k \leftrightarrow \neg P_{k+2}\ ;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{P_{2k} \rightarrow P_{2k+1}\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$.
2. Soit une partie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{F}$ telle que $\{\delta_{2k}\ ;\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \Delta(\mathscr{T})$. Montrer que l'ensemble de formules $\mathscr{T} \cup \{\neg P_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est finiment satisfaisable et en déduire, à l'aide du théorème de compacité, que l'on a nécessairement $\delta_\infty \in \Delta(\mathscr{T})$.
3. Déterminer un ensemble de formules $\mathscr{T}$ tel que $\Delta(\mathscr{T}) = \{\delta_{2k}\ ;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{\delta_\infty\}$.

Exercice 7 Donner une démonstration formelle (sans aucune hypothèse) en Déduction Naturelle de chacune des tautologies :

- $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C) \ \rightarrow\ (A \wedge B \rightarrow C)$
- $A \wedge \neg B \ \rightarrow\ \neg(A \rightarrow B)$
- $\neg(A \rightarrow B) \ \rightarrow\ A \wedge \neg B$
- $A \vee \neg A$.