Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

Année 2016/17
LO3 – L2 1er semestre

Examen du 22 juin 2017

Durée : 3 heures

Calculatrices, téléphones cellulaires et documents interdits

Questions de cours Énoncer les théorèmes suivants.

1. Le théorème de Cantor-Bernstein.
2. Le théorème de lecture unique de la logique propositionnelle.
3. Le théorème de compacité de la logique propositionnelle.

Logique du premier ordre

Exercice 1 On se place dans le langage du premier ordre $\mathcal{L} = (f, g)$, où f et g sont des symboles de fonction binaires, et on considère la formule de $\mathcal{L}$:

$$F \;=\; \exists x \exists y (\neg {=}(x, y) \wedge {=}(f(x, g(x, y)), y))\,.$$

Soit $t[x, y]$ le terme $f(x, g(x, y))$, $E[x, y]$ la formule $=(t[x, y], y)$, $G[x, y]$ la formule $(\neg {=}(x, y) \wedge E[x, y])$ et $H[x]$ la formule $\exists y\, G[x, y]$. La formule $\exists x\, H[x]$ est donc exactement F.

1. Déterminer l'arbre des sous-termes du terme $t[x, y]$, puis l'arbre syntaxique de $t[x, y]$.
2. Déterminer l'arbre des sous-formules de la formule F, puis l'arbre syntaxique de F.

On considère la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} = \langle M; f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}\rangle$ dont le domaine est $M = \{-1, 0, 1\}$ et où les symboles de fonction f, g ont comme interprétations les applications $f^{\mathfrak{M}} : M^2 \to M$ et $g^{\mathfrak{M}} : M^2 \to M$ définies par $f^{\mathfrak{M}}(a, b) = \max(a, b)$ et $g^{\mathfrak{M}}(a, b) = ab$.

3. Préciser dans un tableau comme ci-dessous, *à reproduire sur la copie d'examen*, l'interprétation $t^{\mathfrak{M}}[a, b]$ du terme $t[x, y]$ lorsque le couple (a, b) décrit M^2.

		b		
		-1	0	1
a	1			
	0			
	-1			

4. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) de M^2 tels que $\mathfrak{M} \models E[a, b]$, puis l'ensemble des couples $(a, b) \in M^2$ tels que $\mathfrak{M} \models G[a, b]$.
5. En déduire l'ensemble des éléments a de M tels que $\mathfrak{M} \models H[a]$.
6. Déterminer si la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ satisfait la formule F ou non.

Exercice 2 Donner, dans chacun des cas suivants, une formule close F_i du langage $\mathcal{L}_i$ vraie dans la $\mathcal{L}_i$-structure $\mathfrak{A}_i$ et fausse dans la $\mathcal{L}_i$-structure $\mathfrak{B}_i$ (P y est toujours un symbole de prédicat binaire et f, g des symboles de fonction binaires.)

1. $\mathcal{L}_1 = (P)$ $\quad \mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{R}\,;\, \leqslant\rangle$ $\quad \mathfrak{B}_1 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\, \subseteq\rangle$
2. $\mathcal{L}_2 = (P, f)$ $\quad \mathfrak{A}_2 = \langle \mathbb{R}\,;\, \leqslant,\, +\rangle$ $\quad \mathfrak{B}_2 = \langle \mathbb{R}\,;\, \leqslant,\, \times\rangle$
3. $\mathcal{L}_3 = (f, g)$ $\quad \mathfrak{A}_3 = \langle \mathbb{R}\,;\, +\,,\, \times\rangle$ $\quad \mathfrak{B}_3 = \langle \mathbb{R}\,;\, \max,\, +\rangle$
4. $\mathcal{L}_4 = (f, g)$ $\quad \mathfrak{A}_4 = \langle \mathbb{R}\,;\, +\,,\, \times\rangle$ $\quad \mathfrak{B}_4 = \langle \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,;\, +,\, \circ\rangle$.

Exercice 3 On se place ici dans le langage $\mathcal{L} = (f, g)$ doté des symboles de fonction binaires f, g. Définir, dans chacun des cas suivants, une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}_i$ qui satisfait la formule F_i, mais pas la formule G_i.

1. $F_1 \;=\; \forall x {=}(g(f(x)), x)$ $\qquad G_1 \;=\; \forall x {=}(f(g(x)), x)$
2. $F_2 \;=\; \forall x {=}(g(f(f(x))), f(g(f(x))))$ $\qquad G_2 \;=\; \forall x {=}(g(f(x)), f(g(x)))$
3. $F_3 \;=\; \forall x \exists y {=}(f(x), g(y))$ $\qquad G_3 \;=\; \forall x \exists y {=}(g(x), f(y))$.

Cardinalité

Exercice 4 On dit qu'un réel α est *algébrique* lorsqu'il est racine d'un polynôme P non nul à coefficients rationnels : $P(\alpha)=0$ où $P\in\mathbb{Q}[X]\setminus\{0\}$. Par exemple, tout rationnel $r\in\mathbb{Q}$ est algébrique $\big($en tant que racine du polynôme $X-r\in\mathbb{Q}[X]\big)$, mais aussi $\sqrt{2}$ $\big($racine de $X^2-2\big)$, $\sqrt[3]{4+\sqrt{5/7}}$ $\big($racine de $(X^3-4)^2-5/7\big)$ … Notons $\mathbb{A}$ l'ensemble des réels algébriques. On a donc $\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{A}\subseteq\mathbb{R}$. Un réel non algébrique est dit *transcendant.*

1. Montrer l'énoncé : π transcendant ou e transcendant $\Longrightarrow$ $\pi+e$ transcendant ou πe transcendant.

Cet exercice s'assigne un but bien plus modeste que de démontrer que les π et e sont effectivement transcendants. Il s'agit seulement d'établir ici qu'il existe un réel transcendant, ne serait-ce qu'un seul, et sans se demander lequel.

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers : $p_0=2$, $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7$, $p_4=11\ldots$ et pour tout polynôme $a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ de $\mathbb{Q}[X]$, on pose :

$$\Phi(a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n)=p_0^{\varphi(a_0)}p_1^{\varphi(a_1)}\ldots p_n^{\varphi(a_n)} \qquad (\dagger)$$

où φ est une bijection $\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0)=0$.

2. On rappelle $\operatorname{card}(\mathbb{Q})=\aleph_0$. En déduire qu'il existe bien une bijection $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0)=0$.
3. Montrer que $(\dagger)$ définit alors une bijection $\Phi:\mathbb{Q}[X]\to\mathbb{N}^*$. En déduire : $\operatorname{card}(\mathbb{Q}[X])=\aleph_0$.

On appelle *polynôme minimal* d'un réel algébrique $\alpha\in\mathbb{A}$, et on note P_α, un polynôme de la forme $P(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_0$ et de degré n minimal tel que $P(\alpha)=0$.

4. Justifier l'existence et l'unicité du polynôme minimal P_α pour tout réel algébrique α.

Définissons le *rang* $\operatorname{rg}(\alpha)$ d'un réel algébrique $\alpha\in\mathbb{A}$ par $\operatorname{rg}(\alpha)=\operatorname{card}\big(\{x\in]-\infty,\alpha[\ \big|\ P_\alpha(x)=0\}\big)$.

5. Montrer que l'application $\Psi:\mathbb{A}\to\mathbb{N}$ définie par $\Psi(\alpha)=2^{\Phi(P_\alpha)}3^{\operatorname{rg}(\alpha)}$ est injective.
6. En déduire soigneusement à l'aide du théorème de Cantor-Bernstein que l'on a : $\operatorname{card}(\mathbb{A})=\aleph_0$. On précisera notamment les injections auxquelles on applique le théorème de Cantor-Bernstein.
7. Montrer que $\mathbb{A}\subsetneq\mathbb{R}$.

Logique propositionnelle

Exercice 5 Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des atomes propositionnels et $\Sigma=\mathscr{P}\cup\{\bot,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow,(,)\}$ l'alphabet de la logique propositionnelle. On note Σ^* le monoïde des mots sur cet alphabet Σ. Pour tout mot $M\in\Sigma^*$, on note :

- $a(M)$ le nombre d'occurrences d'*atomes* propositionnels dans M.
- $b(M)$ le nombre d'occurrences de connecteur *binaire* $(\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow)$ dans M.
- $n(M)$ le nombre d'occurrences du symbole de *négation* $(\neg)$ dans M.
- $p(M)$ le nombre d'occurrences de *parenthèse* dans M.

On rappelle que les applications $a,b,n,p:\Sigma^*\to\mathbb{N}$ ainsi définies sont des morphismes de monoïdes, et donc $a(MN)=a(M)+a(N)$, $b(MN)=b(M)+b(N)$, $n(MN)=n(M)+n(N)$, $p(MN)=p(M)+p(N)$.

1. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathscr{F}$ $(\subseteq\Sigma^*)$ des formules propositionnelles.
2. Montrer par induction structurelle sur les formules propositionnelles $F\in\mathscr{F}$ que $a(F)=b(F)+1$.
3. Montrer par une autre induction structurelle que pour toute formule $F\in\mathscr{F}$: $p(F)=2b(F)$.
4. En déduire pour toute formule $F\in\mathscr{F}$ une expression de sa *longueur* $\lg(F)$ en fonction de $b(F)$ et de $n(F)$.

Exercice 6 On suppose désormais que $\mathscr{P}=\{A_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ (où les atomes propositionnels A_k sont distincts). Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note δ_n la distribution de valeurs de vérité définie par $\delta_n(A_k)=1$ si $k<n$, $\delta_n(A_k)=0$ sinon, et δ_∞ celle définie par $\delta_\infty(A_k)=1$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Enfin, soit $\mathscr{T}\subseteq\mathscr{F}$ une théorie quelconque.

1. Montrer que $\delta_\infty\vDash\mathscr{T}$ si et seulement si la théorie $\mathscr{P}\cup\mathscr{T}$ est satisfaisable.
2. Montrer que si $\delta_n\vDash\mathscr{T}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}\cup\mathscr{T}$ est finiment satisfaisable.
3. En déduire à l'aide du théorème de compacité : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \delta_n\vDash\mathscr{T}\implies\delta_\infty\vDash\mathscr{T}$.

Exercice 7 Donner une démonstration formelle (en Déduction Naturelle) de chacune des formules : $\neg A\to(A\to B)$, $B\to(A\to B)$, $(\neg A\vee B)\to(A\to B)$, $(A\to B)\to(\neg A\vee B)$.