Examen partiel du 29 octobre 2016

Durée : 3 heures

Calculatrices, téléphones cellulaires et documents interdits

Questions de cours

1. Énoncer le théorème de Cantor-Bernstein.
2. Qu'est-ce qu'une relation de bon ordre ?

Exercice 1 Soit $f : E \to F$ une application quelconque, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

1. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
2. Établir l'inclusion $f(A \cup f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cup B$.
3. Montrer que si f est surjective, alors $f(A \cup f^{-1}(B)) = f(A) \cup B$.
4. Donner un exemple d'application $f : E \to F$ et de parties $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{F}$, telles que $f(A \cup f^{-1}(B)) \neq f(A) \cup B$.

Exercice 2

1. Déterminer les ensembles $\displaystyle\bigcup_{a\in]0,+\infty[} [a, +\infty[$ et $\displaystyle\bigcap_{a\in]0,+\infty[} [a, +\infty[$.
2. Justifier le fait que $\displaystyle\prod_{a\in]0,+\infty[} [a, +\infty[$ soit un ensemble de fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Caractériser les fonctions f de cet ensemble à l'aide d'une inégalité qu'elles sont seules à vérifier.

Exercice 3 On considère la relation $|$ sur $\mathbb{N}$ définie par $a \,|\, b \overset{\text{déf}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N}\ an = b$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$.

1. Rappeler brièvement pourquoi $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ a pour cet ordre $|$ un plus petit élément et un plus grand élément que l'on précisera.
3. Déterminer les éléments minimaux de P_0 pour l'ordre $|$, puis ceux de P_1 et ceux de P_2.

Exercice 4 On considère l'application $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\Phi(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$.

1. Montrer que Φ est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
2. Soit $f : E \to \mathbb{N}$ et $g : F \to \mathbb{N}$ deux applications quelconques et $\Psi_{f,g} : E \times F \to \mathbb{N}$ l'application définie par $\Psi_{f,g}(x, y) = \Phi(f(x), g(y))$. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f et g l'application $\Psi_{f,g}$ est-elle injective ? surjective ? (On justifiera soigneusement chaque réponse.)
3. En déduire le cardinal d'un produit cartésien $E \times F$ d'ensembles dénombrables E, F.

Exercice 5

1. Montrer que $]-\pi/2, \pi/2[$ est équipotent à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que deux intervalles ouverts bornés non vides $]a, b[$ et $]a', b'[$ sont équipotents.
3. L'ensemble $\mathcal{P}(]0, 1[)$ est-il équipotent à $\mathbb{R}$? (On justifiera soigneusement la réponse.)

Exercice 6 On considère ici le langage $\mathcal{L}$ du premier ordre ayant un seul symbole de constante c, deux symboles de fonction f, g d'arités respectives 2 et 1, et deux symboles de prédicats P, Q, d'arités respectives 2 et 1. (Les variables sont notées $x, y, z, x', y', z' \ldots$)

Déterminer pour chacune des suites de symboles suivantes, s'il s'agit d'un terme ou d'une formule du langage $\mathcal{L}$, et déterminer son arbre syntaxique lorsque c'est le cas.

- $f(x, g(c, y)$
- $f(x, g(c, y))$
- $\neg(\exists y\, P(f(x, c), y) \wedge Q(y))$
- $\forall x \exists y\, f(x, y)$
- $\forall x \exists y\, (Q(f(y, y)) \rightarrow P(f(x, x), c))$
- $\forall z \exists z\, (Q(f(y, y)) \rightarrow P(f(x, x), c))$
- $(\forall x \forall y\ =(x, y) \rightarrow =(f(x, y), f(y, x)))$
- $f(c, f(c, f(c, f(c, f(c, x)))))$
- $P(c, f(c, f(c, f(c, f(c, x)))))$
- $\neg\forall x \neg\exists x \neg\forall x \neg\exists x\, Q(x)$

Exercice 7 Afin de parler des réels, d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et d'une partie P de $\mathbb{R}$, on se place dans le langage $\mathcal{L}$ du premier ordre ayant un symbole de fonction unaire f exprimant la fonction f, un symbole de prédicat unaire P tel que $\mathrm{P}(t)$ exprime « le réel t appartient à la partie P » et le symbole de prédicat binaire $\leqslant$ exprimant l'ordre naturel des réels. (On rappelle que $\mathcal{L}$ dispose automatiquement du symbole de prédicat logique $=$. Les variables sont notées $x, y, z, x', y', z' \ldots$)

Traduire par une formule de ce langage $\mathcal{L}$ chacune des phrases suivantes.

- x est le plus grand élément de P.
- La partie P a un plus grand élément.
- La partie P est bornée.
- x est la borne supérieure de P.
- La fonction f est décroissante.
- La fonction f n'est pas croissante.
- La fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Université Paris Diderot — Année 2015/16
Département de Sciences Exactes — LO3 – L2 1er semestre

Examen partiel du 24 octobre 2016

Durée : 3 heures

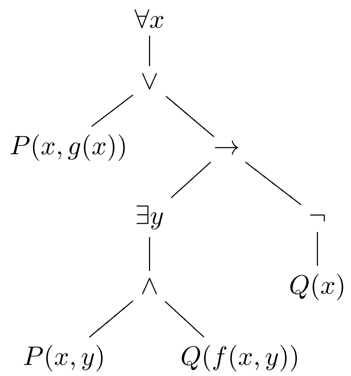
Calculatrices, téléphones cellulaires et documents interdits

Questions de cours

1. Rappeler la définition de *l'équivalence logique* de formules closes F et G dans un langage $\mathcal{L}$ quelconque (équivalence que l'on note $F \equiv G$).
2. Rappeler la définition de *l'ensemble quotient* $E/\!\sim$, où E est un ensemble quelconque et $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

Exercice 1 On considère le langage $\mathcal{L} = (f, g, P, Q)$, où f est un symbole de fonction binaire, g un symbole de fonction unaire, P un symbole de prédicat binaire et Q un symbole de prédicat unaire.

1. Écrire la formule du langage $\mathcal{L}$ dont l'arbre syntaxique est :



2. Déterminer l'arbre syntaxique de la formule : $(\forall x \exists y P(f(y, x)) \rightarrow \exists y(\neg P(g(x), y) \wedge \forall z Q(g(y))))$. Préciser, en justifiant la réponse, si cette formule est close.

Soit $t[x, y]$ le terme $f(g(x), y)$, $F[x, y]$ la formule $(P(x, y) \rightarrow Q(t[x, y]))$, $G[x]$ la formule $\exists y F[x, y]$ et enfin H la formule close $\forall x G[x]$. H est donc la formule $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(f(g(x), y)))$ du langage $\mathcal{L}$. On considère la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} = \langle M; f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}, P^{\mathfrak{M}}, Q^{\mathfrak{M}} \rangle$, dont le domaine est $M = \{0, 1\}$, dont les interprétations des symboles de fonction $f^{\mathfrak{M}} : M^2 \rightarrow M$ et $g^{\mathfrak{M}} : M \rightarrow M$ sont respectivement définies par $f(a, b) = ab$ et $g(a) = 1 - a$, et où $P^{\mathfrak{M}} = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ et $Q^{\mathfrak{M}} = \{1\}$.

3. Donner, pour chacun des quatre couples (a, b) de M^2, l'interprétation $t^{\mathfrak{M}}[a, b]$ du terme $t[x, y]$.
4. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) de M^2 tels que $\mathfrak{M} \models F[a, b]$.
5. En déduire l'ensemble des éléments a de M tels que $\mathfrak{M} \models G[a]$.
6. Déterminer si la formule close H du langage $\mathcal{L}$ est vraie ou fausse dans la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$.

Exercice 2 Donner, dans chacun des cas suivants, une formule close F_i du langage $\mathcal{L}_i$ vraie dans la $\mathcal{L}_i$-structure $\mathfrak{A}_i$ et fausse dans la $\mathcal{L}_i$-structure $\mathfrak{B}_i$.

1.	$\mathcal{L}_1 = (P)$	$\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{N} ; \leqslant \rangle$	$\mathfrak{B}_1 = \langle \mathbb{N}^* ; \mid \rangle$
2.	$\mathcal{L}_2 = (P)$	$\mathfrak{A}_2 = \langle\,]0, 1[\, ; < \rangle$	$\mathfrak{B}_2 = \langle \mathbb{Z} ; < \rangle$
3.	$\mathcal{L}_3 = (P)$	$\mathfrak{A}_3 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \in \rangle$	$\mathfrak{B}_3 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \subset \rangle$
4.	$\mathcal{L}_4 = (g)$	$\mathfrak{A}_4 = \langle\, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ; \sin \rangle$	$\mathfrak{B}_4 = \langle\, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ; \cos \rangle$
5.	$\mathcal{L}_5 = (*)$	$\mathfrak{A}_5 = \langle \mathbb{Z} ; + \rangle$	$\mathfrak{B}_5 = \langle \mathfrak{S}_8 ; \circ \rangle$
6.	$\mathcal{L}_6 = (c, g, *)$	$\mathfrak{A}_6 = \langle \mathbb{R} ; 0, x \mapsto x^2, + \rangle$	$\mathfrak{B}_6 = \langle \mathbb{C} ; 0, z \mapsto z^2, + \rangle$
7.	$\mathcal{L}_7 = (g, *)$	$\mathfrak{A}_7 = \langle \mathbb{R} ; x \mapsto x^2, + \rangle$	$\mathfrak{B}_7 = \langle \mathbb{Q} ; x \mapsto x^2, + \rangle$.

N.B. Dans tous ces langages $\mathcal{L}_i$, P est un symbole de prédicat binaire, c un symbole de constante, g un symbole de fonction unaire et $*$ un symbole de fonction binaire.

Exercice 3 On se place ici dans le langage $\mathcal{L} = (P)$ doté du seul symbole de prédicat binaire P. Définir, dans chacun des cas suivants, une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}_i$ qui satisfait la formule F_i, mais pas la formule G_i.

1.	$F_1 = \exists x \exists y \; P(x,y)$	$G_1 = \forall x \exists y \; P(x,y)$
2.	$F_2 = \forall x \exists y \; P(x,y)$	$G_2 = \exists y \forall x \; P(x,y)$
3.	$F_3 = \forall x \forall y \exists z \; (P(x,z) \vee P(z,y))$	$G_3 = \forall x \exists z \forall y \; (P(x,z) \vee P(z,y))$
4.	$F_4 = \forall x \exists y \; (P(x,y) \wedge P(y,y))$	$G_4 = \exists x \forall y \; (P(x,y) \to P(y,y))$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer dans le langage $\mathcal{L} = (0, f, |\cdot|, >)$ les assertions suivantes.

1. La fonction f ne s'annule jamais.
2. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
3. f atteint un maximum sur $\mathbb{R}$.
4. f prend des valeurs strictement positives arbitrairement petites.
5. f tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

Exercice 5 On s'intéresse ici aux images directes et réciproques de parties par des fonctions.

1. Déterminer les images réciproques et les images directes suivantes :

   - $f^{-1}(\{0\})$
   - $f^{-1}(]-\infty, 0[)$
   - $f^{-1}(]-\infty, 1])$
   - $f(]-1, 2[)$
   - $f([-3, 1])$
   - $f(]-1, 1])$

   lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application définie par $x \mapsto x^2$.
2. Exhiber une application $f : E \to F$ et des parties A, B de E tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Soit $f : E \to F$ une application quelconque. Montrer que l'on a pour toutes parties A, B de E $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si et seulement si f est injective.

Exercice 6 Soit $I = \{1, \ldots, 6\}$, $J = \{1, \ldots, 8\}$ et $(E_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille quelconque d'ensembles.

1. Exprimer les énoncés :
   $$z \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} E_{i,j}, \qquad z \in \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} E_{i,j}$$
   uniquement à l'aide de l'énoncé $z \in E_{i,j}$ et de quantifications relativisées à I et à J.
2. En déduire une comparaison des ensembles $A = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} E_{i,j}$ et $B = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} E_{i,j}$.
3. Déterminer ces deux ensembles lorsque $E_{i,j} = [i + j, i + j + 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Exercice 7 Soit E un ensemble quelconque. Pour toute partie P de E, on considère la fonction caractéristique
$$1_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P \\ 0 & \text{si } x \notin P. \end{cases}$$
Soit $A, B \subseteq E$. De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions caractéristiques ?

1. $\max(1_A, 1_B)$
2. $1_A \cdot 1_B$
3. $1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B$.