Examen du 3 janvier 2017

Durée : 3 heures

Calculatrices, téléphones cellulaires et documents interdits

Questions de cours

1. Qu'est-ce qu'une forme normale conjonctive ?
2. Mentionner deux théorèmes dont la démonstration utilise le *lemme de Zorn*.

Exercice 1 On se place dans le langage du premier ordre $\mathcal{L} = (f, g, P)$, où f est un symbole de fonction binaire, g un symbole de fonction unaire, P un symbole de prédicat unaire, et on considère la formule de $\mathcal{L}$:

$$F = \forall x \exists y (P(y) \wedge = (y, f(x, g(y)))) .$$

Soit $t[x, y]$ le terme $f(x, g(y))$, $E[x, y]$ la formule $= (y, t[x, y])$, $G[x, y]$ la formule $(P(y) \wedge E[x, y])$ et $H[x]$ la formule $\exists y G[x, y]$. La formule $\forall x H[x]$ est donc exactement F .

1. Déterminer l'arbre des sous-formules de la formule F , puis l'arbre syntaxique de F .

On considère la $\mathcal{L}$ -structure $\mathfrak{M} = \langle M; f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}, P^{\mathfrak{M}} \rangle$, dont le domaine est $M = \{-1, 0, 1\}$, dont les interprétations des symboles de fonction $f^{\mathfrak{M}} : M^2 \rightarrow M$ et $g^{\mathfrak{M}} : M \rightarrow M$ sont respectivement définies par $f^{\mathfrak{M}}(a, b) = \min(a, b)$ et $g^{\mathfrak{M}}(a) = a^2$, et dont l'interprétation du symbole P est $P^{\mathfrak{M}} = \{-1, 0\}$.

2. Consigner dans un tableau comme ci-dessous (à reproduire sur la copie d'examen), l'interprétation $t^{\mathfrak{M}}[a, b]$ du terme $t[x, y]$ lorsque le couple (a, b) décrit M^2 .

		$\overbrace{\hspace{1.5cm}}^b$		
		-1	0	1
{	1			
	0			
	-1			

3. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) de M^2 tels que $\mathfrak{M} \models E[a, b]$, puis l'ensemble des couples $(a, b) \in M^2$ tels que $\mathfrak{M} \models G[a, b]$.
4. En déduire l'ensemble des éléments a de M tels que $\mathfrak{M} \models H[a]$.
5. Déterminer si la $\mathcal{L}$ -structure $\mathfrak{M}$ satisfait la formule F ou non.

Exercice 2 Donner, dans chacun des cas suivants, une formule close F_i du langage $\mathcal{L}_i$ vraie dans la $\mathcal{L}_i$ -structure $\mathfrak{A}_i$ et fausse dans la $\mathcal{L}_i$ -structure $\mathfrak{B}_i$ (f, g y sont toujours des symboles de fonction binaires, c et u des symboles de constante, et P est un symbole de prédicat binaire.)

1. $\mathcal{L}_1 = (f)$	$\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{N}; + \rangle$	$\mathfrak{B}_1 = \langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \circ \rangle$
2. $\mathcal{L}_2 = (f, c)$	$\mathfrak{A}_2 = \langle \{0, 1\}^*; \cdot, \varepsilon \rangle^\dagger$	$\mathfrak{B}_2 = \langle \{0, 1\}^{\{0, 1\}}; \circ, \text{Id}_{\{0, 1\}} \rangle$
3. $\mathcal{L}_3 = (f, g, c, u)$	$\mathfrak{A}_3 = \langle \mathbb{Z}; +, \times, 0, 1 \rangle$	$\mathfrak{B}_3 = \langle \mathbb{R}[X]; +, \times, 0, 1 \rangle^\ddagger$
4. $\mathcal{L}_4 = (P)$	$\mathfrak{A}_4 = \langle \mathbb{N}; \leq \rangle$	$\mathfrak{B}_4 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}); \subseteq \rangle$
5. $\mathcal{L}_5 = (P)$	$\mathfrak{A}_5 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}); \subseteq \rangle$	$\mathfrak{B}_5 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}; \subseteq \rangle$
6. $\mathcal{L}_6 = (P)$	$\mathfrak{A}_6 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}; \subseteq \rangle$	$\mathfrak{B}_6 = \langle \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \text{Card}(A) = \aleph_0\}; \subseteq \rangle$
7. $\mathcal{L}_7 = (P)$	$\mathfrak{A}_7 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}); \subseteq \rangle$	$\mathfrak{B}_7 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\{0, 1\}\}; \subseteq \rangle$

$^\dagger \{0, 1\}^*$ désigne ici l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$, $\cdot$ l'opération de concaténation sur $\{0, 1\}^*$, et ε le mot vide de $\{0, 1\}^*$.

$^\ddagger \mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Exercice 3 On se place ici dans le langage $\mathcal{L} = (f)$ doté du seul symbole de fonction unaire f . Définir, dans chacun des cas suivants, une $\mathcal{L}$ -structure $\mathfrak{M}_i$ qui satisfait la formule F_i , mais pas la formule G_i .

1. $F_1 = \forall x = (f(f(f(x))), f(x))$	$G_1 = \forall x = (f(f(x)), x)$
2. $F_2 = \exists x \exists y = (f(x), f(y)) \wedge \neg = (x, y)$	$G_2 = \exists x \forall y \neg = (x, f(y))$
3. $F_3 = \exists x \forall y \exists z = (f(z), y) \vee = (x, y)$	$G_3 = \forall x \exists y = (x, f(y))$

Logique propositionnelle

Dans la suite, $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des formules propositionnelles défini, comme dans le cours, à partir d'un ensemble arbitraire $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles. (Les formules de $\mathcal{F}$ utilisent les symboles logiques $\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.)

Exercice 4 Soit Σ un ensemble dénombrable quelconque et Σ^* l'ensemble des mots sur l'alphabet Σ .

1. Justifier l'existence d'une application bijective $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}^*$.

On considère une telle bijection $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}^*$, à partir de laquelle on définit le *numéro de Gödel* $\overline{M}$ de tout mot non vide $M = s_1 s_2 \dots s_k \in \Sigma^*$ (où $s_1, s_2, \dots, s_k \in \Sigma$) par :

$$\overline{M} \stackrel{\text{déf}}{=} p_1^{\varphi(s_1)} p_2^{\varphi(s_2)} \dots p_k^{\varphi(s_k)}$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11 \dots$). On attribue au mot vide $\varepsilon \in \Sigma^*$ le *numéro de Gödel* $\overline{\varepsilon} = 0$.

2. Montrer que l'application $\Phi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\Phi(M) = \overline{M}$ est injective. Est-elle surjective ?
3. En déduire soigneusement à l'aide du théorème de Cantor-Bernstein que Σ^* est équipotent à $\mathbb{N}$. (On précisera à quelles injections on applique le théorème de Cantor-Bernstein.)
4. Toujours à l'aide du théorème de Cantor-Bernstein, montrer que si l'ensemble $\mathcal{P}$ des variables propositionnelles est dénombrable, alors l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles l'est aussi.
5. Déterminer le cardinal de $\mathcal{F}$ lorsque $\mathcal{P}$ est fini.

Exercice 5 Montrer par induction structurale sur la formule $F \in \mathcal{F}$ qu'il existe une formule G sans occurrence du symbole $\neg$ telle que $F \equiv G$. Qu'en déduit-on concernant l'ensemble de symboles logiques $\{\perp, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$?

Exercice 6 Pour toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$, on pose : $\Delta(\mathcal{T}) = \{\delta \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}} \mid \delta \models \mathcal{T}\}$ et si $\mathcal{T}'$ est une autre partie de $\mathcal{F}$, on note $\mathcal{T} \vee \mathcal{T}'$ l'ensemble des formules de $\mathcal{F}$ qui sont de la forme $(F \vee G)$, où $F \in \mathcal{T}$ et $G \in \mathcal{T}'$.

1. Établir les relations : $\Delta(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}') = \Delta(\mathcal{T}) \cap \Delta(\mathcal{T}')$, $\Delta(\mathcal{T} \vee \mathcal{T}') = \Delta(\mathcal{T}) \cup \Delta(\mathcal{T}')$.
2. Comment appelle-t-on une formule F telle que $\Delta(\{F\}) = \emptyset$? Et une formule G telle que $\Delta(\{G\}) = \{0, 1\}^{\mathcal{P}}$? Déterminer de telles formules F et G qui soient de longueur minimale.

On suppose maintenant que $\mathcal{P}$ est fini, mettons $\mathcal{P} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$.

3. Pour toute distribution de valeurs de vérité δ , déterminer une formule F telle que $\Delta(\{F\}) = \{\delta\}$.
4. En déduire que pour toute partie S de $\{0, 1\}^{\mathcal{P}}$, il existe une formule F telle que $\Delta(\{F\}) = S$, par récurrence sur $\text{Card}(S)$.

On suppose désormais que $\mathcal{P}$ est dénombrable : $\mathcal{P} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (où les variables propositionnelles A_n sont distinctes). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note δ_k la distribution de valeurs de vérité définie par $\delta_k(A_n) = 1$ si $n < k$, $\delta_k(A_n) = 0$ sinon, et δ_∞ celle définie par $\delta_\infty(A_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer des ensembles de formules $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ tels que $\Delta(\mathcal{T}_1) = \{\delta_0\}$, $\Delta(\mathcal{T}_2) = \{\delta_1, \delta_3\}$ et $\Delta(\mathcal{T}_3) = \{\delta_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\delta_\infty\}$.
6. Soit $\mathcal{T}$ tel que $\delta_k \models \mathcal{T}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble de formules $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$ est finiment satisfaisable et en déduire, à l'aide du théorème de compacité, que $\delta_\infty \models \mathcal{T}$.
7. Existe-t-il, pour n'importe quelle partie S de $\{0, 1\}^{\mathcal{P}}$, une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ telle que $\Delta(\mathcal{T}) = S$?

Exercice 7 Donner une démonstration formelle (en Déduction Naturelle) de chacune des formules : $(A \vee B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$, $A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \vee (B \wedge C)$.