Université Denis Diderot - Paris 7
L2 Informatique

MI4
Année 2005-2006

Exemple de partiel

Durée théorique : 3 heures

Exercice 1

1. Montrer que $\mathbb{R}^*$ muni de la multiplication est un groupe abélien. Qu'en est-il de $\mathbb{R}$ muni de la multiplication ?
2. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients réels muni de l'addition est un groupe. Qu'en est-il de l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont la dérivée est nulle en 0 muni de l'addition ?
3. Soit quatre fonctions f_i avec $i = 1, 2, 3, 4$, définies sur $]0, +\infty[$ par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$ et $f_4(x) = -\frac{1}{x}$.
   L'ensemble composé de ces quatre fonctions forme-t-il un groupe pour la loi de composition habituelle des applications ?

Exercice 2 Soit G l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que c'est un groupe multiplicatif isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 3 Soit G un groupe fini et soit $\mathcal{S}_G$ l'ensemble des applications bijectives de G dans G, i.e. c'est le groupe symétrique sur G.

1. Soit $a \in G$. Montrer que l'application $f_a : x \mapsto ax$ de G dans G est un élément de $\mathcal{S}_G$.
2. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} f : G &\to \mathcal{S}_G \\ a &\mapsto f_a \end{aligned}$$

   est un morphisme de groupes injectif.
3. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$ (théorème de Cayley).

Exercice 4 Dans $\mathcal{S}_8$, on pose $s = (1\ 7\ 3\ 2)(5\ 4)$, $a = (8\ 1\ 6\ 3)(4\ 2\ 5\ 7)$ et $b = (8\ 6)(2\ 7)$.

1. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints $a \circ s$, $s \circ a$, $s \circ a^2$ et $b \circ a^2$.
2. (a) Calculer l'ordre m de $g = s \circ a^2$. Décomposer g^{67} en produit de cycles à supports disjoints.
   (b) On pose $H = \{g, g^2, \ldots, g^m\}$. Démontrer que H est un sous-groupe de $\mathcal{S}_8$.
3. On pose $K = \{b, b \circ a^2, a^2, id\}$. Démontrer que K est un sous-groupe de $\mathcal{S}_8$.
4. Les groupes H et K sont-ils isomorphes ?

Exercice 5 Soit G un groupe et soient H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$. On suppose que K est distingué dans G.

1. Montrer que $HK = KH$ et que HK est un sous-groupe de G.
2. Montrer que H et K sont des sous-groupes de KH et que $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de H et que K est distingué dans KH.