

Examen de contrôle continu du lundi 4 mars 2019

Durée : 2 heures.

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.*

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $1665x + 1035y = 45$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 1$ n'est pas divisible par 4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 6 divise $n^3 - n$.

Exercice 3.

1. Trouver le reste de la division par 7 du nombre 2000^{2000} .
2. Quel est le chiffre des unités de 20192019^{10} ?

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{Z} le système suivant :

$$S : \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{9} \end{cases}$$

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des x dans \mathbb{Z} qui sont solutions de l'équation (E) dans chacun des cas suivants :

1. $(E) : 3x \equiv 3 \pmod{11}$.
2. $(E) : 3x \equiv 3 \pmod{12}$.

Exercice 6.

1. Énoncer le théorème de Bézout.
2. Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (a) Les entiers m et n sont premiers entre eux.
 - (b) Il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $mu \equiv 1 \pmod{n}$.

Exercice 7. (Bonus) Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?