Correction de l'examen de contrôle continu du lundi 4 mars 2019

Exercice 1. [**3pts**]Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $1665x + 1035y = 45$.

Un simple calcul donne les décompositions en facteurs premiers :

$$1665 = 3^2 \times 5 \times 37 \text{ et } 1035 = 3^2 \times 5 \times 23$$

Donc $\text{pgcd}(1665, 1035) = 3^2 \times 5 = 45$. Ainsi l'équation $1665x + 1035y = 45$ a des solutions dans $\mathbb{Z}$ et est équivalente à $37x + 23y = 1$ avec 37 et 23 premiers entre eux.

L'algorithme d'Euclide appliqué à 37 et 23 donne :

$$\begin{array}{lll}
37 = 23 + 14 & & \\
23 = 14 + 9 & \text{d'où} \quad 1 = & 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \times 5 - 9 = 2 \times (14 - 9) - 9 \\
14 = 9 + 5 & = & 2 \times 14 - 3 \times 9 = 2 \times 14 - 3 \times (23 - 14) = 5 \times 14 - 3 \times 23 \\
9 = 5 + 4 & = & 5 \times (37 - 23) - 3 \times 23 = 5 \times 37 - 8 \times 23 \\
5 = 4 + 1 & &
\end{array}$$

On a donc les équivalences suivantes, pour x et y dans $\mathbb{Z}$:

$$37x + 23y = 1 \iff 37x + 23y = 5 \times 37 - 8 \times 23 \iff 23(y + 8) = 37(5 - x)$$

Puisque 23 et 37 sont premiers entre eux, le lemme de Gauss assure que l'égalité $23(y + 8) = 37(5 - x)$ n'est possible que si 23 divise $5 - x$. On en déduit :

$$23(y+8) = 37(5-x) \iff \exists s \in \mathbb{Z} \ : \begin{cases} 5 - x = 23s \\ 23(y+8) = 37 \times 23s \end{cases} \iff \exists s \in \mathbb{Z} \ : \begin{cases} x = 5 - 23s \\ y = 37s - 8 \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation $1665x + 1035y = 45$ est l'ensemble $\{(5 - 23s, 37s - 8) \mid s \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2.

1. [**1,5pts**] Monter que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 1$ n'est pas divisible par 4.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

- Pour $n = 2k$, $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$.
  Donc le reste de la division euclidienne de $n^2 + 1$ par 4 lorsque n est pair est 1.
- Pour $n = 2k + 1$, $n^2 + 1 = 4(k^2 + k) + 2$.
  Donc le reste de la division euclidienne de $n^2 + 1$ par 4 lorsque n est impair est 2.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 1$ n'est pas divisible par 4.

2. [**1,5pts**] Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 6 divise $n^3 - n$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ est le produit de trois nombres consécutifs.
Parmi trois nombres consécutifs il y a toujours un multiple de 3 et au moins un multiple de 2.
Ainsi $n^3 - n$ est multiple de 3 et de 2, donc de $\text{ppcm}(3, 2) = 6$. Par suite 6 divise $n^3 - n$.

Exercice 3.

1. **[2pts]** Trouver le reste de la division par 7 du nombre 2000^{2000}.

On a : $2000 \equiv 5 \bmod 7$, $5^2 \equiv 4 \bmod 7$, $5^3 \equiv -1 \bmod 7$ et donc $5^6 \equiv 1 \bmod 7$.
D'autre part $2000 = 333 \times 6 + 2$. On en déduit :

$$2000^{2000} \equiv (2000^6)^{333} \times 2000^2 \equiv (5^6)^{333} \times 5^2 \equiv 1^{333} \times 4 \equiv 4 \bmod 7$$

Donc le reste de la division par 7 de 2000^{2000} est 4.

2. **[1,5pts]** Quel est le chiffre des unités de 20192019^{10} ?

On a $20192019 \equiv 9 \bmod 10$ et $9^2 \equiv 81 \equiv 1 \bmod 10$. On en déduit :

$$20192019^{10} \equiv 9^{10} \equiv (9^2)^5 \equiv 1^5 \equiv 1 \bmod 10$$

Le chiffre des unités de 20192019^{10} est donc 1.

Exercice 4. **[4pts]** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $S : \left\{ \begin{array}{rcl} x & \equiv & 4 \mod 6 \\ x & \equiv & 7 \mod 9 \end{array} \right.$

<u>1ère méthode</u> On a les équivalences :

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+2 & \equiv & 0 \mod 6 \\ x+2 & \equiv & 0 \mod 9 \end{array} \right. \iff (x+2) \in 6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$$

$$\iff (x+2) \in \mathrm{ppcm}(6,9)\mathbb{Z} \iff (x+2) \in 18\mathbb{Z}$$

Finalement, l'ensemble des x dans $\mathbb{Z}$ solutions de S est $\{-2 + 18t \; | t \in \mathbb{Z}\}$.
<u>2ième méthode</u> On a les équivalences :

$$S \iff \exists\, t, s \in \mathbb{Z} \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4+6t \\ x & = & 7+9s \end{array} \right. \iff \exists\, t, s \in \mathbb{Z} \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4+6t \\ 2t-3s & = & 1 \end{array} \right.$$

L'équation diophantienne $2t - 3s = 1$ admet $t_0 = 2$ et $s_0 = 1$ comme solution particulière évidente. Puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, on a pour t, s dans $\mathbb{Z}$:

$$2t-3s = 1 \iff 2t-3s = 2\times 2 - 3\times 1 \iff 2(t-2) = 3(s-1) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \;:\; \left\{ \begin{array}{l} s-1 = 2k \\ t-2 = 3k \end{array} \right.$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; \left\{ \begin{array}{l} s = 1+2k \\ t = 2+3k \end{array} \right.$$

Finalement x est solution entière du système S si et seulement si il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = 4 + 6(2+3k) = 16 + 18k$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des x dans $\mathbb{Z}$ qui sont solutions de l'équation (E) dans chacun des cas suivants :

1. **[1,5pts]** $(E) : 3x \equiv 3 \bmod 11$.

Puisque 3 et 11 sont premiers entre eux, 3 est inversible pour la multiplication modulo 11. Précisément, on a $3 \times 4 \equiv 1 \bmod 11$, dont on déduit :

$$3x \equiv 3 \bmod 11 \iff 4 \times 3x \equiv 4 \times 3 \bmod 11 \iff x \equiv 1 \bmod 11$$

L'ensemble des x dans $\mathbb{Z}$ solutions de (E) est donc $\{1 + 11t \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

2. **[1,5pts]** (E) : $3x \equiv 3 \mod 12$.

   Pour x dans $\mathbb{Z}$, on a les équivalences :

$$3x \equiv 3 \mod 12 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; 3x = 3 + 12k \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; x = 1 + 4k$$

   L'ensemble des x dans $\mathbb{Z}$ solutions de (E) est donc $\{1 + 4t \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 6.

1. **[1pt]** Enoncer le théorème de Bézout.

Les entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers U et V tels que : $aU + bV = 1$.

2. **[2pts]** Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) Les entiers m et n sont premiers entre eux.
   (b) Il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $mu \equiv 1 \mod n$.

Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $mu + nv = 1$. Or $mu + nv \equiv mu \mod n$.
Donc, il existe un entier u, tel que $mu \equiv 1 \mod n$. Ainsi (a) implique (b).

On suppose désormais que m et n sont deux entiers naturels non nuls tels qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ pour lequel $mu \equiv 1 \mod n$. Autrement dit, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $mu = 1 + kn$ où encore $mu - kn = 1$. Donc d'après le théorème de Bézout, m et n sont premiers entre eux et (b) implique (a).

Finalement, (a) et (b) sont équivalents.

Exercice 7. (Bonus)**[4pt]** Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

Si on note c le nombre de coq, p le nombre de poule et l le nombre de lot de de quatre poussins achetés on obtient :

$$c,\ p,\ l \text{ sont dans } \mathbb{N} \text{ et sont solutions du système } (S) = \begin{cases} 5c + 3p + l = 100 \\ c + p + 4l = 100 \end{cases}$$

On a l'équivalences :

$$(S) \iff \begin{cases} c + p + 4l = 100 \\ 11l - 2c = 200 \end{cases}$$

Les nombres 11 et 2 sont premiers entre eux et $11 \times 1 - 2 \times 5 = 1$.
On a donc pour l et c dans $\mathbb{Z}$:

$$11l - 2c = 200 \iff 11l - 2c = 11 \times 200 - 2 \times 1000 \iff 11(l - 200) = 2(c - 1000)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \;:\; \begin{cases} l = 200 + 2k \\ c = 1000 + 11k \end{cases}$$

Les solutions dans $\mathbb{Z}$ de (S) sont donc :

$$\begin{cases} l = 200 + 2k \\ c = 1000 + 11k \\ p = 100 - 4l - c = -1700 - 19k \end{cases} ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Il existe une seule solution dans $\mathbb{N}$; obtenue pour $k = -90$: $l = 20$, $c = 10$, $p = 10$.
Ont donc été achetés : 10 coqs, 10 poules et $20 \times 4 = 80$ poussins.