

Groupes et arithmétique

Contrôle continu 1

21 février 2017

Le seul matériel autorisé est du papier, un stylo et un effaceur.

Exercice 1

On considère les permutations suivantes de \mathfrak{S}_7 :

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer σ^{-1} , τ^{-1} et $\sigma\tau$.
2. Quel est le support de σ ?
3. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoint.
4. Décomposer σ en produit de transpositions.
5. Quelle est la signature de σ ?

Exercice 2

1. Existe-t-il des entiers x et y tels que $26x + 16y = 5$?
2. Déterminer les entiers x et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $13x + 15y = 3$
3. J'ai une collection de livres. Lorsque je les range par 13, il en reste 4 et lorsque je les range par 15, il en reste 1.
 - (a) Quels sont les nombres possibles de livres que je peux posséder ?
 - (b) Quel est le nombre minimum de livres que je peux posséder ?

Exercice 3

1. Convertir en base 10 les nombres suivants : $(75)_8$, $(3121)_7$, $(10101)_2$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24.$$
3. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $a+b$ et ab sont également premiers entre eux.