

## Devoir surveillé n° 1 : lundi 20 février (12h00-13h00)

### Exercice 1

On pose

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_8.$$

1. Donner  $\sigma^{-1}$ .
2. Décomposer  $\sigma$  en produit de cycles à supports disjoints.
3. Décomposer  $\sigma$  en produit de transpositions.
4. Quelle est la signature de  $\sigma$  ?

### Exercice 2

1. Déterminer une solution particulière dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $7x + 16y = 1$ .
2. Donner toutes les solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $7x + 16y = 1$ .
3. Alice est au bord d'un lac, et possède deux récipients, un de 7 litres et l'autre de 16 litres.
  - a. En utilisant ce qui précède, montrer qu'Alice peut en remplissant ou en vidant le contenu des deux récipients un certain nombre de fois et dans un ordre approprié, obtenir exactement 1 litre d'eau dans l'un des deux récipients.
  - b. Donner une solution du problème qui utilise un nombre minimal de remplissage du récipient de 16 litres.
4. Alice possède maintenant un récipient de 14 litres et un autre de 21 litres. Peut elle obtenir exactement 1 litre d'eau ?

### Exercice 3

On considère un entier naturel  $n \geq 1$  qui s'écrit  ${}^7\overline{xyz}$  en base sept et  ${}^9\overline{zyx}$  en base neuf.

1. Montrer que  $y = 24x - 40z$ .
2. En déduire que  $y = 0$ .
3. Déterminer  $n$  dans le système décimal.