Correction du devoir surveillé n° 1 du lundi 20 février

Solution de l'exercice 1

1. On a $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 2 & 8 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.
2. La décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints est $(1\ 2\ 3\ 7)(4\ 6\ 8)$.
3. On déduit de la question précédente que $\sigma = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 7)(4\ 6)(6\ 8)$.
4. Pour calculer la signature de σ, on peut par exemple utiliser la question 2, en remarquant que la décomposition contient 3 cycles (en comptant les cycles de longueur 1), donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{8-3} = -1$. On aurait également pu utiliser la question 3 et la multiplicativité de la signature, ou encore revenir à la définition en calculant le nombre d'inversions de σ.

Solution de l'exercice 2

1. Déterminons une solution particulière dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $7x + 16y = 1$. On a

$$\begin{aligned} 16 &= 2 \times 7 + 2 \\ 7 &= 3 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

   On va calculer une solution particulière à partir du tableau suivant.

16		1	0
7		0	1
2	-2	1	-2
1	-3	-3	7

   On obtient donc

$$(-3) \times 16 + 7 \times 7 = 1,$$

   et $(7, -3)$ est une solution particulière de l'équation.
2. Par le cours, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \{(7 - 16k, -3 + 7k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. a. Toute solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $7x + 16y = 1$ donne une solution au problème. En effet, en remplissant x fois le récipient de 7 litres si $x \geqslant 0$ (ou en le vidant $|x|$ fois si $x \leqslant 0$), et en vidant $|y|$ fois celui de 16 litres si $y \leqslant 0$ (ou en le remplissant y fois si $y \geqslant 0$), alors on produit exactement 1 litre d'eau.

   b. On veut remplir le récipient de 16 litres un minimum de fois. On cherche donc la solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation telle que $y \geqslant 0$ et minimal. Par la question 2, on obtient cette solution pour $k = 1$. On trouve $(-9, 4)$. On va décrire explicitement la solution correspondante.

Étape	Récipient de 7 litres	Récipient de 16 litres
1	0	16
2	7	9
3	0	9
4	7	2
5	0	2
6	2	0
7	2	16
8	7	11
9	0	11
10	7	4
11	7	4
12	0	4
13	4	0
14	4	16
15	7	13
16	0	13
17	7	6
18	0	6
19	6	0
20	6	16
21	7	15
22	0	15
23	7	8
24	0	8
25	7	1
26	0	$\boxed{\mathbf{1}}$

Les 0 en rouge correspondent aux étapes où l'on vide le récipient de 7 litres, et les 16 en bleu à celles où l'on remplit celui de 16 litres. On constate qu'il y a bien 9 zéro rouges et 4 seize bleus.

4. Il y aura une solution au problème si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $14x + 21y = 1$. Or $\text{pgcd}(14, 21) = 7$ ne divise pas 1. Donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$. Il est donc impossible à Alice d'obtenir exactement 1 litre avec ces deux récipients.

Solution de l'exercice 3

L'énoncé implique implicitement que $0 \leqslant x \leqslant 6$, $0 \leqslant y \leqslant 6$ et $0 \leqslant z \leqslant 6$.

1. L'entier n s'écrit ${}^{7}\overline{xyz}$ en base sept, c'est à dire $n = 7^2x + 7y + z$. De même, comme n s'écrit ${}^{9}\overline{zyx}$ en base neuf, on a $n = 9^2z + 9y + x$. Il suit que $49x + 7y + z = n = 81z + 9y + x$, c'est à dire $48x - 80z = 2y$. Ainsi $y = 24x - 40z$.
2. Par la question 1, on a $y = 24x - 40z = 8(3x - 5z)$, donc 8 divise y. Or $0 \leqslant y \leqslant 6$, donc $y = 0$.
3. Par la question 2, $y = 0$, donc $8(3x - 5z) = 0$, c'est à dire $3x = 5z$ (puisque $8 \neq 0$). Donc 3 divise $5z$. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, le lemme de Gauss implique que 3 divise z. Il existe donc $q \in \mathrm{N}$ tel que $z = 3q$ et $3x = 5 \times 3q$ donc $x = 5q$. Par ailleurs, les conditions $0 \leqslant x \leqslant 6$ et $0 \leqslant z \leqslant 6$ imposent $(x, z) \in \{(0, 0), (3, 5)\}$. Réciproquement, comme $n \geqslant 1$, on exclut la solution $(0, 0)$ et pour $x = 5$, $y = 0$ et $z = 3$, on trouve $n = 49 \times 5 + 3 = 248$. On vérifie que $248 = 81 \times 3 + 5$.