

Partiel du 12 mars 2016

Les exercices sont indépendants. On peut apporter un page A4 et écrire les formules et théorèmes de mon cours. MAIS il n'y a pas d'autres documents autorisés, ni poly, ni TD, ni notes de cours. Les calculatrices ne sont pas autorisées. On rappelle que « résoudre » une équation signifie trouver toutes ses solutions.

Exercice 1 Résoudre en nombres entiers l'équation :

$$451x \equiv 11 \pmod{99}. \quad (1)$$

Même question avec l'équation :

$$451x \equiv 7 \pmod{99}. \quad (2)$$

Exercice 2 Trouver deux entiers u, v tels que $5u + 9v = 1$. En déduire une solution particulière (x_0, y_0) à valeurs entières du système d'équations suivant

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{9}, \end{cases} \quad (3)$$

puis résoudre le système (3) dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que les nombres 45 et 17 sont premiers entre eux et déterminer tous les entiers u, v , tels que $45u + 17v = 1$.

En utilisant les questions précédentes, démontrer que le système d'équations dans $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{9} \\ x \equiv 1 \pmod{17} \end{cases} \quad (4)$$

est équivalent à un système de deux équations et donner toutes ses solutions dans $\mathbb{Z}$ avec la même méthode que celle utilisée pour le système (3).

Exercice 3 Déterminer le reste de la division par

- le reste de la division par 36 de 41^{241} puis le reste de la division par 57 de $122^{41^{241}}$.
- le reste de la division par $88 = 8 \times 11$ de 18^{261} .

Exercice 4 Soit $n > 1$ un entier.

- Quels sont les éléments de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ d'ordre 1 ?

2. Question de cours : Soit $(A, +, *)$ un anneau, et 1_A l'élément neutre pour la multiplication $*$, donner la définition d'élément inversible de l'anneau A ? A. A quelle condition A est-il un corps? A quelle condition sur $n > 1$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il un corps.
3. On pose $k = 27 \times 11$. Combien y-a-t-il de nombres entiers entre 1 et k qui sont premier à k ?

Exercice 5 Résoudre en nombres entiers l'équation suivante :

$$xy = 2x^2 + 2y - 1. \quad (5)$$

(indication : on pourra considérer le changement de variable $u = x - 2$)