Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI4– Année 2015/16
L2 Info

Partiel du 12 mars 2016

Les exercices sont indépendants. On peut apporter un page A4 et écrire les formules et théorèmes de mon cours. MAIS il n'y a pas d'autres documents autorisés, ni poly, ni TD, ni notes de cours. Les calculatrices ne sont pas autorisées. On rappelle que « résoudre » une équation signifie trouver toutes ses solutions.

Exercice 1 Résoudre en nombres entiers l'équation :

$$451x \equiv 11 \mod 99. \tag{1}$$

Même question avec l'équation :

$$451x \equiv 7 \mod 99. \tag{2}$$

On commence par calculer avec l'algorithme d'Euclide $d := pgcd(451; 99)$ Comme $451 = 4 \times 99 + 55$ et $99 = 1 \times 55 + 44$, $55 = 1 \times 44 + 11$, $44 = 4 \times 11 + 0$, on trouve $d = 11$.

De plus le calcul donne $11 = 55 - (99 - 55) = 2 \times 55 - 99 = 2 \times (451 - 4 \times 99) - 99 = 2 \times 451 - 9 \times 99$.

On observe que $d = 11$ divise 11 donc la première équation possède des solutions. l'ensemble des solutions

$$S = \{x = \frac{11}{11} \times 2 + \frac{99}{11} l = 2 + 9l | l \in \mathbb{Z}\}.$$

La deuxième équation n'a pas de solution entières puisque 11 ne divise pas 7.

Exercice 2 Trouver deux entiers u, v tels que $5u + 9v = 1$. En déduire une solution particulière (x_0, y_0) à valeures entières du système d'équations suivant

$$\begin{cases} x & \equiv & 1 \mod 5 \\ x & \equiv & 2 \mod 9, \end{cases} \tag{3}$$

puis résoudre le système (3) dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que les nombres 45 et 17 sont premiers entre eux et déterminer tous les entiers u, v, tels que $45u + 17v = 1$.

En utilisant les questions précédentes, démontrer que le système d'équations dans $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x & \equiv & 1 \mod 5 \\ x & \equiv & 2 \mod 9 \\ x & \equiv & 1 \mod 17 \end{cases} \tag{4}$$

est quivalement à un système de deux équations et donner toutes ses solutions dans $\mathbb{Z}$ avec la même méthode que celle utilisée pour le système (3).

Sol. 1. D'abord, 5 et 9 sont primier entre eux, et $2 \times 5 - 1 \times 9 = 1$.
Par le lemme Chinois, la solution de (3) est

$$\{x = 1 \times (-1 \times 9) + 2 \times (2 \times 5) + 5 \times 9l = 11 + 45l | l \in \mathbb{Z}\}.$$

2. On commence par calculer avec l'algorithme d'Euclide $d := pgcd(45; 17)$
Comme $45 = 2 \times 17 + 11$ et $17 = 1 \times 11 + 6$, $11 = 1 \times 6 + 5$, $6 = 1 \times 5 + 1$. on trouve $d = 1$.
On a $1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 1 \times 6) = 2 \times 6 - 11 = 2 \times (17 - 11) - 11 = 2 \times 17 - 3 \times (45 - 2 \times 17) = 8 \times 17 - 3 \times 45$.
La solution est

$$\{(u, v) = (-3 + 17l, 8 - 45l) | l \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Par 1, on sait $\begin{cases} x & \equiv & 1 \mod 5 \\ x & \equiv & 2 \mod 9 \end{cases}$ est equivalent à $x \equiv -7 \mod 45$. Donc (4) est equivalent à

$$\begin{cases} x & \equiv & 11 & \mod 45 \\ x & \equiv & 1 & \mod 17 \end{cases} \tag{5}$$

Par 2 et le lemme chinois, la solution est $\mod 17 \times 45 = 765$, $x \equiv 11 \times 8 \times 17 + 1 \times (-3 \times 45) \equiv 43 \times 17 - 3 \times 45 \equiv 731 - 135 \equiv 596$. C.à. d. $x \equiv 596 \mod 765$

Exercice 3 Déterminer le reste de la division par

1. le reste de la division par 36 de 41^{241} puis le reste de la division par 57 de $122^{41^{241}}$.
2. le reste de la division par $88 = 8 \times 11$ de 18^{261}.

Sol. 1a. On note $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n.
Alors $\varphi(36) = \varphi(2^2)\varphi(3^2) = 2(2-1) \times 3(3-1) = 12$. $pgcd(36, 41) = 1$, et donc par le théorème d'Euler, $41^{12} \equiv 1 \mod (36)$.
Mais $241 \equiv 1 \mod (12)$, donc

$$41^{241} \equiv 41^1 \equiv 5 \mod (36).$$

1b. On a $122 = 8 \mod (57)$, donc

$$122^{41^{241}} = 8^{41^{241}} \mod (57).$$

On a $pgcd(8, 57) = 1$ $\varphi(57) = \varphi(3)\varphi(19) = 36$, Par le théorème d'Euler, $8^{36} \equiv 1 \mod (57)$.
Par 1, on a

$$8^{41^{241}} = 8^5 = 2^{15} \mod (57).$$

On a finalement

$$122^{41^{241}} \equiv 2^{15} \mod (57).$$

Mais $2^6 = 64 \equiv 7 \mod (57)$. Donc $2^{15} \equiv 7 \times 7 \times 8 \equiv 7 \times (-1) \equiv 50 \mod (57)$.

Finalement,
$$122^{41^{241}} \equiv 50 \mod (57).$$

2. Comme $pgcd(18, 88) = 2$, on ne peux pas appliquer directement le théorème d'Euler.

On va utiliser le lemme chinois. On doit calculer le reste de la division par 8 et 11 de 18^{261}.

On a $18^{261} = 2^{261} \times 9^{261} \equiv 0 \mod (8)$.

Par le petit théorème de Fermat, on a $18^{10} = 1 \mod (11)$. Et $261 \equiv 1 \mod (10)$, donc $18^{261} \equiv 18 \equiv 7 \mod (11)$.

Pour l'equation de Bezout $8u + 11v = 1$, on a une soultion particulier, $3 \times 11 - 4 \times 8 = 1$. Donc par le lemme chinois, $18^{261} \equiv 0 \times (3 \times 11) + 7 \times (-4 \times 8) = (-33 + 5) \times 8 \equiv 40 \mod (88)$.

Exercice 4 Soit $n > 1$ un entier.

1. Quels sont les éléments de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ d'ordre 1 ?
2. Question de cours : Soit $(A, +, *)$ un anneau, et 1_A l'élément neutre pour la multiplication $*$, donner la définition d'élément inversible de l'anneau A ? A. A quelle condition A est-il un corps ? A quelle condition sur $n > 1$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il un corps.
3. On pose $k = 27 \times 11$, il y a combien de nombres entre 1 et k qui sont premier à k ?

Sol. 1. $\bar{0}$.

2. $x \in A$ est inversible s'il existe $y \in A$ tel que $x * y = y * x = 1_A$.

Si tout $x \in A \setminus \{0\}$ est inversible, alors A est un corps.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps ssi n est premier.

3. Il y a $\varphi(27 \times 11) = \varphi(3^3) \times \varphi(11) = 3^2(3-1)(11-1) = 180$ de nombres entre 1 et k qui sont premier à k.

Exercice 5 Résoudre en nombres entiers l'équation suivante :

$$xy = 2x^2 + 2y - 1. \tag{6}$$

(indication : on pourra considérer le changement de variable $u = x - 2$)

Sol : On a $(x-2)y = 2(x-2)(x+2) + 7$, ou $u(y - 2u - 8) = 7$. Donc $x - 2$ divise 7, et $y = 2(x+2) + 7/(x-2)$

Mais 7 est un nombre premier, ca implique $x - 2 = \pm 7, \pm 1$. Donc $x = 9, -5, 3$ ou 1. Si $x = 9$, on a $y = 2 \times 11 + 1 = 23$. Si $x = -5$, on a $y = 2 \times (-3) - 1 = -7$. Si $x = 3$, on a $y = 2 \times 5 + 7 = 17$. Si $x = 1$, on a $y = 2 \times 3 - 7 = -1$.

La solution est $(x, y) = (9, 23), (-5, -7), (3, 17), (1, -1)$.