

Examen du 23 juin 2011

L'examen dure 3 heures. Les exercices sont indépendants. Les documents autorisés sont le photocopié, les notes de cours et TD. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1. Quel est le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 33 ?

Exercice 2. Si $N \geq 3$ est un nombre impair, on pose

$$F := \{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}\}$$

- a) Calculer le cardinal de F pour $N = 17$, puis pour $N = 59$.
- b) Calculer le cardinal de F pour $N = 17 \times 59 = 1003$.

Exercice 3. Soit $M = 2^{13} - 1 = 8191$.

- a) Quel est l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$?
- b) Soit p un diviseur premier de M . Quel est l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$?
- c) En déduire que $p \equiv 1 \pmod{13}$.
- d) La partie entière de $\frac{\sqrt{8191}-1}{13}$ est 6. Quelles sont les nombres premiers $p \leq \sqrt{M}$ qui vérifient $p \equiv 1 \pmod{13}$.
- e) Le nombre M est-il premier ?

Exercice 4. Résoudre en nombres entiers chacune des équations suivantes

$$7987x + 3920y = 35 \tag{1}$$

$$7987x + 3920y = 98 \tag{2}$$

Exercice 5. Résoudre en nombres entiers les systèmes d'équations suivants

$$\begin{cases} x \equiv 32 \pmod{225} \\ x \equiv 253 \pmod{125} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x \equiv 32 \pmod{225} \\ x \equiv 107 \pmod{125} \end{cases} \tag{4}$$