Université Paris Diderot **L2 Info - 2011**

EXAMEN PARTIEL D'ARITHMÉTIQUE

12 MARS 2011

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices sont indépendants.
Une réponse ne vaut que si elle est justifiée par un argument complet et explicite.
Les calculettes et les téléphones ne sont pas autorisés.

On rappelle qu'un groupe est dit cyclique, s'il possède un générateur.
La fonction indicatrice d'Euler est notée φ.

Exercice I.

a) Trouvez toutes les solutions de l'équation $2x^2 - 6x + 5 = 0$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

b) Trouvez toutes les solutions de l'équation $x^2 + 3x + 14 = 0$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

c) Trouvez le nombre de solutions de l'équation $x^2 + 6x + 23 = 0$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$.

Exercice II.

a) Calculer $\varphi(9)$ et $\varphi(45)$.

b) Calculer l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ et en déduire que ce dernier est cyclique.

c) Ecrire, à l'aide du théorème Chinois, le groupe $(\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})^\times$ comme produit de groupes cycliques.

d) Trouver les ordres possibles d'un élément de $(\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})^\times$.

e) Trouver le reste de la division euclidienne de 2027^{2011} par 45.

T.S.V.P.

Exercice III. On considère l'ensemble d'entiers $S = \{5, 8, 10, 12\}$.

a) Pour tout n dans S déterminer si le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique et le cas échéant trouver tous ses générateurs.

b) Déterminer les $n \in S$ tels que pour tout entier x, relativement premier à n, $x^2 - 1$ est mutiple de n.

c) Trouvez tous les entiers m pour lequels $\varphi(m) = 4$ (*on pourra d'abord démontrer qu'un tel m est de la forme $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ avec $\alpha \leq 3$, $\beta \leq 1$ et $\gamma \leq 1$*).

Exercice IV. Etant donnés trois nombres premiers distincts p, q et r, l'on considère l'équation suivante dans $\mathbb{Z}$:

$$aqr + bpr + cpq = 1 \tag{$\star$}$$

a) Montrer que $(\star)$ possède des solutions (*on pourra commencer par écrire une relation de Bézout entre q et r, puis entre p et qr*).

b) On fixe une solution particulière (a_0, b_0, c_0) de $(\star)$. Montrer que (a, b, c) est une solution de $(\star)$ si, et seulement s'il existe des entier u et v tels que $a = a_0 + pu$, $b = b_0 + qv$ et $c = c_0 - r(u + v)$.

c) Trouver une relation de Bézout entre 11 et 13.

d) Trouver une solution (a_0, b_0, c_0) de $(\star)$ pour $p = 7$, $q = 11$ et $r = 13$.

e) Trouver une solution (a, b, c) de $(\star)$ avec $|a| + |b| + |c| \leq 7$. Est-elle unique ?