

Examen du 7 janvier 2008

Durée : 3 heures

Barème indicatif : I = 2 ; II = 3 ; III = 6 ; IV = 6 ; V = 3

L'utilisation de calculatrices, téléphones portables et documents est interdite.

I

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n + (-1)^n n + 1}; \quad \sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right).$$

II

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sin \frac{1}{n+1}\right)^2 z^n; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!(2n+1)!}{n!(n+1)!} z^n;$$

et

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad \text{où } a_{3p} = 8^p, a_{3p+1} = 27^p \text{ et } a_{3p+2} = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

III

1) Montrer que chacune des séries entières

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n+2}$$

a un rayon de convergence égal à 1.

On posera désormais

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

2) On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{2x^n}{n(n+2)}$. Montrer que cette série converge normalement sur $[-1, 1]$. *On posera*

$$\forall x \in [-1, 1] \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{n(n+2)}.$$

La suite de l'exercice a pour but de "calculer" les fonctions f, g, h , c'est-à-dire de les exprimer comme des fonctions usuelles.

- 3) Montrer que $f(x) = -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
- 4) Calculer $g(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Indication : on observera d'abord que $x^2 g(x)$ s'exprime simplement à l'aide de $f(x)$.
- 5) Calculer $h(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Indication : on verra que $h(x)$ s'exprime simplement à l'aide de $f(x)$ et de $g(x)$.
- 6) En utilisant un théorème du cours, que l'on citera, montrer que h est continue sur $[-1, 1]$. En déduire les valeurs de $h(1)$ et $h(-1)$.

IV

On considère les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que l'une de ces matrices est diagonalisable, alors que l'autre ne l'est pas.
- On choisit désormais $j \in \{1, 2\}$ de sorte que A_j soit diagonalisable.

- 2) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$P^{-1}A_jP = D.$$

- 3) Calculer P^{-1} en utilisant la formule de la comatrice.
- 4) Calculer $(A_j)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

V

On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{cases}.$$

Étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer la solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ de ce système qui vérifie $x(0) = a$ et $y(0) = b$.