Université Paris Diderot Paris 7
Licence L2 (S3)
2019-2020

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires III
MI3

Examen Partiel

9 Novembre 2019

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

---

1. **Exercice 1.** On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, -1, 1) \ , \ u_2 = (1, 0, 1) \text{ et } u_3 = (0, 1, -1) \ .$$

   (a) Forment-ils un système libre dans $\mathbb{R}^3$?

   (b) Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est-il engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$?

   (c) Trouver les scalaires λ, μ, ν tels que

$$e_2 = (0, 1, 0) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 \ .$$

2. **Exercice 2**. Déterminer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)}$

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \exp(-x^2)}{x\,(\exp(x) - \exp(-x))}$

3. **Exercice 3**. On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$w_1 = (1, 0, 1, 0) \ , \ w_2 = (1, 1, -1, -1) \ , \ w_3 = (0, 1, 1, 0) \text{ et } w_4 = (0, -1, 2, 1) \ .$$

   On notera F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces quatre vecteurs. Soit $u = (2, 1, 6, 1)$.

   (a) Montrer que u est un vecteur de F .

   (b) Le système $\{u, w_1\}$ est-il libre ? Même question pour $\{u, w_2\}$, $\{u, w_3\}$ et $\{u, w_4\}$.

   (c) Compléter le vecteur u par un ou plusieurs vecteurs w_i de façon à ce que le système $\{u, w_{j_1}, \ldots\}$ soit à la fois libre et générateur dans F .

4. **Exercice 4**. On souhaite étudier, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction

$$g(x) = \frac{\ln\left(x^3 + 3x^2 + 1\right)}{3} .$$

   (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\ln\left(1 + 3h + h^3\right)$ lorsque h tend vers 0 .

   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $g(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ [on pourra poser $h = \frac{1}{x}$].

   (c) Montrer que la fonction $g(x)$ est équivalente à la fonction $h(x) = \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que le graphe de la fonction $h(x) = \ln(x)$ est asymptote au graphe de $y = g(x)$ (lorsque x tend vers $+\infty$).

   (d) Positionner le graphe de $y = g(x)$ par rapport à celui de $y = h(x)$ (lorsque x tend vers $+\infty$).

Barême indicatif : Exercice 1 (6=2+2+2 points). Exercice 2 (6=2+2+2 points). Exercice 3 (5=1+2+2 points). Exercice 4 (6=2+1+2+1 points).