(Un) Corrigé de l'examen Partiel

9 Novembre 2019

Durée : 3 heures.

1. **Exercice 1.** On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, -1, 1)\ ,\ u_2 = (1, 0, 1) \text{ et } u_3 = (0, 1, -1)\ .$$

(a) Forment-ils un système libre dans $\mathbb{R}^3$?

(b) Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est-il engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$?

(c) Trouver les scalaires λ, μ, ν tels que

$$e_2 = (0, 1, 0) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3\ .$$

Indications.

(a) Étudions les combinaisons linéaires de ces trois vecteurs qui sont nulles soit

$$\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda(1, -1, 1) + \mu(1, 0, 1) + \nu(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

ou

$$\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on a successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Notre système est donc un système homogène de rang 3 de trois équations à trois inconnues. Il admet donc une unique solution : la solution nulle. Donc le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

(b) Dire que tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ c'est dire que le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

admet au moins une solution en (λ, μ, ν) . Or ce système d'équations est de rang 3 et il est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z-x \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-z \end{pmatrix} .$$

Ce système admet une unique solution. Donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est bien engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$. Ce système est libre et générateur dans $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. On voit de plus que les solutions sont

$$\nu = x - z\ ,\ \mu = x + y - \nu = y + z \text{ et } \lambda = x - \mu = x - y - z\ .$$

La notion de dimension aurait permis de conclure plus vite. En effet, d'après la question précédente, le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est un système libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Il engendre donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ soit $\mathbb{R}^3$ lui-même.

(c) Trouver les scalaires λ, μ, ν tels que

$$e_2 = (0, 1, 0) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3$$

c'est appliquer le pivot de Gauss à la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

et

$$\begin{cases} \lambda+\mu &= 0 \\ \mu+\nu &= 1 \\ -\nu &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -1 \\ \mu &= 1 \\ \nu &= 0 \end{cases} .$$

Mais nous aurions pu appliquer la (fin de la) question précédente :

$$\nu = 0\ ,\ \mu = 1+0 = 1 \text{ et } \lambda = 0-\mu = -1\ .$$

Finalement on remarque que la matrice de passage de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée (grâce à la fin de la deuxième question) par

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

On remarquera bientôt en cours que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

2. **Exercice 2**. Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{\sin(x^2)}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\exp(-x^2)}{x(\exp(x)-\exp(-x))}$

   Indications.
   (a) Pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$, nous pouvons utiliser une identité remarquable ou utiliser un développement limité en posant $h = \frac{1}{x}$. On a

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+1} = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = x\sqrt[3]{1+h+h^3}\ .$$

   Mais

$$\sqrt[3]{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{u}{3}+\frac{\frac{1}{3}\times\frac{-2}{3}}{2}u^2+u^2\epsilon(u) = 1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+u^2\epsilon(u)$$

   si u tend vers 0 . Pour notre expression cela donne

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+1} = x\left(1+\frac{h+h^3}{3}-\frac{(h+h^3)^2}{9}+h^2\epsilon(h)\right)$$

puisque $u \sim_{h\to 0} h$. A l'ordre 2 , nous avons donc

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+1} = x\left(1+\frac{h}{3}-\frac{h^2}{9}+h^2\epsilon(h)\right) = x+\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}+\frac{\epsilon(x)}{x} \, .$$

De façon analogue, nous avons

$$\sqrt[3]{x^3-x^2+1} = x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = x\sqrt[3]{1-h+h^3}$$

soit

$$\sqrt[3]{x^3-x^2+1} = x\left(1+\frac{-h+h^3}{3}-\frac{(-h+h^3)^2}{9}+h^2\epsilon(h)\right)$$

et

$$\sqrt[3]{x^3-x^2+1} = x\left(1-\frac{h}{3}-\frac{h^2}{9}+h^2\epsilon(h)\right) = x-\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}+\frac{\epsilon(x)}{x} \, .$$

Donc

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1} = \left(x+\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}\right)-\left(x-\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}\right)+\frac{\epsilon(x)}{x} = \frac{2}{3}+\frac{\epsilon(x)}{x} \, .$$

Bref

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right) = \frac{2}{3} \, .$$

Il nous faudrait faire un développement limité à l'ordre 3 (au moins) pour savoir cette cette limite (asymptote horizontale) se fait par valeur supérieure ou non.

(b) On sait que

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+x^3\epsilon(x)$$

et

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)$$

soit

$$\sin(x^2) = x^2-\frac{x^6}{6}+x^6\epsilon(x) = x^2+x^3\epsilon(x) \, .$$

Donc

$$\frac{\cos(x)-1}{\sin(x^2)} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+x^3\epsilon(x)-1}{x^2+x^3\epsilon(x)} = \frac{-\frac{x^2}{2}+x^3\epsilon(x)}{x^2+x^3\epsilon(x)}$$

et

$$\frac{\cos(x)-1}{\sin(x^2)} = \left(-\frac{1}{2}+x\epsilon(x)\right)(1-x\epsilon(x)) = -\frac{1}{2}+x\epsilon(x) \, .$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x^2)} = -\frac{1}{2}\ .$$

On peut aussi dire que

$$\cos(x) - 1 \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2} \text{ et } \sin(x^2) \sim_{x\to 0} x^2$$

donc

$$\frac{\cos(x)-1}{\sin(x^2)} \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}\ .$$

(c) Rappelons tout d'abord que

$$\exp(h) = 1 + h + h\epsilon(h)$$

si h tend vers 0 . D'où

$$1 - \exp(-x^2) = x^2 + x^2\epsilon(x)\ ,\ \exp(x) - \exp(-x) = 2x + x\epsilon(x)$$

et

$$\frac{1-\exp(-x^2)}{x(\exp(x)-\exp(-x))} \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\times 2x} = \frac{1}{2}\ .$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\exp(-x^2)}{x(\exp(x)-\exp(-x))} = \dfrac{1}{2}$.

3. **Exercice 3**. On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$w_1 = (1,0,1,0)$, $w_2 = (1,1,-1,-1)$, $w_3 = (0,1,1,0)$ et $w_4 = (0,-1,2,1)$.

On notera F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces quatre vecteurs. Soit $u = (2,1,5,1)$.

(a) Montrer que u est un vecteur de F .

(b) Le système $\{u, w_1\}$ est-il libre ? Même question pour $\{u, w_2\}$, $\{u, w_3\}$ et $\{u, w_4\}$.

(c) Compléter le vecteur u par un ou plusieurs vecteurs w_i de façon à ce que le système $\{u, w_{j_1}, \ldots\}$ soit à la fois libre et générateur dans F .

Indications.

(a) Le vecteur u est un vecteur de F si et seulement s'il existe des coefficients réels $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ tels que

$$u = \lambda w_1 + \mu w_2 + \nu w_3 + \rho w_4\ .$$

Cela revient à étudier le système

$$\begin{pmatrix}2\\1\\6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&-1\\1&-1&1&2\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\\\rho\end{pmatrix}$$

ou encore à appliquer le pivot de Gauss à

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\1&-1&1&2&6\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\1&-1&1&2&6\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\0&-2&1&2&4\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)$$

puis

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\1&-1&1&2&6\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&0&-1&-1\\0&1&1&-1&1\\0&-2&1&2&4\end{array}\right)$$

et

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\1&-1&1&2&6\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&1&0&2\end{array}\right)$$

et finalement

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\1&-1&1&2&6\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Ce système (de rang 3) admet donc une infinité de solutions à 1 paramètre. Donc u est bien engendré par les quatre vecteurs générateurs de F donc appartient à F .

Lorsque l'on résout le système on obtient

$$\begin{cases}\lambda+\mu &= 2\\ \mu-\rho &= -1\\ \nu &= 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda &= 2-\mu\\ \rho &= 1+\mu\\ \nu &= 2\end{cases}$$

(μ pouvant prendre toute valeur réelle). Allons un peu plus loin, on a donc

$$u = (2-\mu)w_1 + \mu w_2 + 2w_3 + (1+\mu)w_4 = 2w_1 + 2w_3 + w_4 + \mu(-w_1 + w_2 + w_4)\,.$$

En particulier, cela signifie que

$$u = 2w_1 + 2w_3 + w_4 + \mu_1(-w_1 + w_2 + w_4) = 2w_1 + 2w_3 + w_4 + \mu_2(-w_1 + w_2 + w_4)$$

pour deux réels distincts μ_1 et μ_2 . On a donc

$$u = 2w_1 + 2w_3 + w_4 \text{ et } -w_1 + w_2 + w_4 = 0\,.$$

Nous avons donc obtenu deux informations complémentaires, la donnée de la combinaison linéaire exprimant u en termes de vecteurs w_i et celle d'une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs w_i eux-mêmes.

(b) D'après le cours, le système $\{u, w_1\}$ sera libre si et seulement si le vecteur w_1 n'est pas proportionnel au vecteur u ($w_1 \notin \mathbb{R}u$). C'est évident car deux des coordonnées de w_1 sont nulles ce qui ne peut être le cas d'un multiple (non nul) de u . De façon analogue, on vérifie facilement que $\{u, w_2\}$, $\{u, w_3\}$ et $\{u, w_4\}$ sont libres car non proportionnels deux à deux.

(c) Utilisons le raisonnement du théorème de la base incomplète. On peut compléter le vecteur u par le vecteur w_1 tout d'abord d'après ce qui précède. Étudions si w_3 est un vecteur engendré par u et w_1 . Cela revient à étudier le rang de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Donc le système $\{u, w_1, w_3\}$ est de rang 3 (c'est un système libre). Lorsque l'on a la notion de dimension, on a terminé. En effet, les 4 vecteurs engendrant F sont de rang 3 d'après la première question. Donc F est de dimension 3 . Or le système $\{u, w_1, w_3\}$ est un système de 3 vecteurs libres dans F . Il est nécessairement générateur d'après le cours. Ici, il conviendrait donc d'être sûr que les vecteurs w_2 et w_4 soient bien engendrés par $\{u, w_1, w_3\}$. Cela peut se voir avec

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Ce qui montre bien que chacun des vecteurs w_2 et w_4 est une combinaison linéaire des vecteurs $\{u, w_1, w_3\}$.
Si l'on a à notre disposition les résultats complémentaires obtenus à la première question, on sait que

$$u = 2w_1 + 2w_3 + w_4 \Leftrightarrow w_4 = u - 2w_1 - 2w_3$$

et

$$-w_1 + w_2 + w_4 = 0 \Leftrightarrow w_2 = w_1 - w_4 = w_1 - u + 2w_1 + 2w_3 = -u + 2w_1 + 2w_3 .$$

Cela explicite les relations dont on connaissait l'existence.

4. **Exercice 4**. On souhaite étudier, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction

$$g(x) = \frac{\ln(x^3 + 3x^2 + 1)}{3} .$$

(a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1 + 3h + h^3)$ lorsque h tend vers 0 .

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $g(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ [on pourra poser $h = \frac{1}{x}$].

(c) Montrer que la fonction $g(x)$ est équivalente à la fonction $h(x) = \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que le graphe de la fonction $h(x) = \ln(x)$ est asymptote au graphe de $y = g(x)$ (lorsque x tend vers $+\infty$).

(d) Positionner le graphe de $y = g(x)$ par rapport à celui de $y = h(x)$ (lorsque x tend vers $+\infty$).

Indications.

(a) On a

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u)$$

lorsque u tend vers 0 . Ici on a $u = 3h + h^3$ soit

$$\ln(1 + 3h + h^3) = 3h + h^3 - \frac{(3h + h^3)^2}{2} + h^2\epsilon(h) = 3h - \frac{9h^2}{2} + h^2\epsilon(h) .$$

(b) Donc

$$\ln\left(x^3+3x^2+1\right)=3\ln(x)+\ln\left(1+3h+h^3\right)=3\ln(x)+3h-\frac{9h^2}{2}+h^2\epsilon(h)\,.$$

Soit

$$g(x)-\ln(x)=h-\frac{3h^2}{2}+h^2\epsilon(h)\,.$$

(c) La différence entre la fonction $h(x)=\ln(x)$ et la fonction $y=g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Donc ces deux graphes sont bien asymptotes. Par ailleurs

$$\frac{g(x)}{\ln(x)}=\frac{\ln(x)+h-\frac{3h^2}{2}+h^2\epsilon(h)}{\ln(x)}=1+\frac{h}{\ln(x)}+\frac{h}{\ln(x)}\epsilon(x)$$

et cette expression tend bien vers 1 si x tend vers $+\infty$.

(d) On a

$$g(x)-\ln(x)=h-\frac{3h^2}{2}+h^2\epsilon(h)\,.$$

Cette expression est donc du signe de h lorsque h est voisin de 0 . Le graphe de g est donc situé au dessus de celui de h .

5. **Exercice 4**. [Énoncé initial] On souhaite comparer, lorsque x tend vers $+\infty$, les deux fonctions

$$f(x)=\frac{\ln\left(x^2+2x+1\right)}{2}\text{ et }g(x)=\frac{\ln\left(x^3+3x^2+1\right)}{3}\,.$$

(a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\ln\left(1+2h+h^2\right)$ lorsque h tend vers 0 . En déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x)-\ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ [on pourra poser $h=\frac{1}{x}$].

(b) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\ln\left(1+3h+h^3\right)$ lorsque h tend vers 0 . En déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $g(x)-\ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ [on pourra de même poser $h=\frac{1}{x}$].

(c) Montrer que les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont équivalentes à la fonction $h(x)=\ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que le graphe de la fonction $h(x)=\ln(x)$ est asymptote aux deux graphes de $y=f(x)$ et $y=g(x)$ (lorsque x tend vers $+\infty$).

(d) Positionner le graphe de $y=f(x)$ et $y=g(x)$ l'un par rapport à l'autre (lorsque x tend vers $+\infty$).

Indications.

(a) Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+2h+h^2)$ (lorsque h tend vers 0) est donné par

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u)$$

lorsque u tend vers 0 . Ici on a $u = 2h + h^2$ donc $u \sim_{h\to 0} 2h$. Soit

$$\ln(1+2h+h^2) = 2h + h^2 - \frac{(2h+h^2)^2}{2} + h^2\epsilon(h) = 2h - h^2 + h^2\epsilon(h)\ .$$

On peut aussi remarquer que

$$\ln(1+2h+h^2) = \ln\left((1+h)^2\right) = 2\ln(1+h) = 2h - h^2 + h^2\epsilon(h)\ .$$

On en déduit que

$$\ln(x^2+2x+1) = 2\ln(x) + \ln\left(1+2h+h^2\right) = 2\ln(x) + 2h - h^2 + h^2\epsilon(h)$$

soit

$$f(x) - \ln(x) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h)\ .$$

(b) Voir ci-dessus.

(c) La différence entre la fonction $h(x) = \ln(x)$ et la fonction $y = f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Donc ces deux graphes sont bien asymptotes. Par ailleurs

$$\frac{f(x)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h)}{\ln(x)} = 1 + \frac{h}{\ln(x)} + \frac{h}{\ln(x)}\epsilon(x)$$

et cette expression tend bien vers 1 si x tend vers $+\infty$.

(d) On voit que

$$f(x) - g(x) = f(x) - \ln(x) + \ln(x) - g(x) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h) - (h - \frac{3h^2}{2} + h^2\epsilon(h))$$

soit

$$f(x) - g(x) = h^2 + h^2\epsilon(h)\ .$$

Donc le signe de cette expression est celui de h^2 lorsque h tend vers 0 . Donc le graphe de g est situé au dessous de celui de f .

Ci-dessous le graphe de f est en bleu, celui de g en vert et celui de ln est en rouge. On pourra remarquer que l'écart entre les graphes de f et de g est clairement inférieur (d'ordre 2 en h) à celui entre les graphes de g et de $ln(x)$ (d'ordre 1 en h).

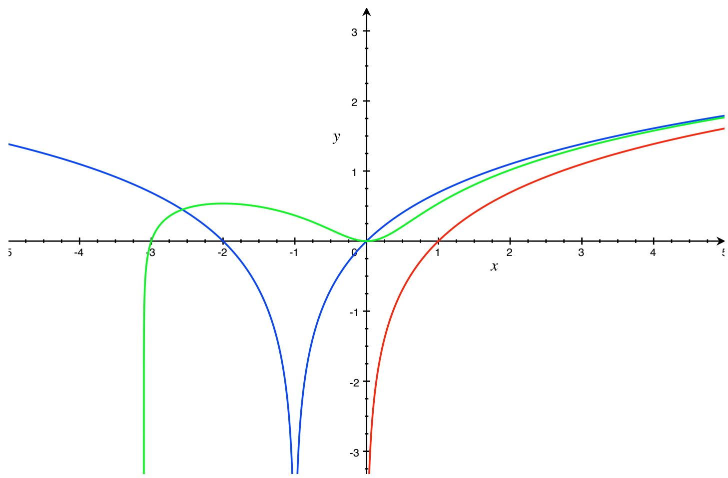

FIGURE 1 – Graphes comparés des fonctions f , g et ln