

(Un) Corrigé de l'examen Terminal

9 Janvier 2020

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

1. **Exercice 1.** On considère la fonction $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$.

- (a) Montrer que $f(x)$ est équivalente à $2 \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- (b) Donner un développement limité à l'ordre 2 en $1/x$ de $f(x) - 2 \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- (c) Trouver une courbe asymptote à $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et positionner le graphe de $f(x)$ par rapport à cette courbe.

Indications.

(a) On a

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) = \ln\left(x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Donc

$$\frac{f(x)}{2 \ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2 \ln(x)}.$$

Mais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \ln(x)} = 0$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2 \ln(x)} = 1.$$

(b) On a

$$f(x) - 2 \ln(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Or

$$\ln(h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2 \epsilon(h).$$

Donc

$$f(x) - 2 \ln(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2}{2} + h^2 \epsilon(h)$$

avec $h = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x}$. Bref

$$f(x) - 2 \ln(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\epsilon(x)}{x^2}.$$

(c) La courbe $2 \ln(x)$ est donc asymptote au graphe de $f(x)$ puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2 \ln(x)) = 0.$$

Par ailleurs le signe de $f(x) - 2 \ln(x)$ est celui de $-\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ donc le graphe de $f(x)$ est en dessous de celui de $2 \ln(x)$. Voici les graphes de ces deux fonctions.

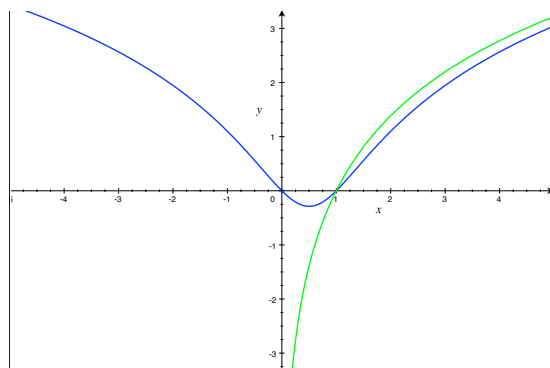


FIGURE 1 – Graphes comparés de $y = f(x)$ et $2 \ln(x)$

2. Exercice 2.

(a) À quelle condition sur (x, y, z, t) le système

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + \delta = x \\ \beta + 2\gamma - \delta = y \\ -\alpha + \gamma + \delta = z \\ \alpha + \beta - 2\gamma + \delta = t \end{cases}$$

admet-il des solutions? Déterminer les solutions lorsque (x, y, z, t) vaut $(0, 0, 0, 0)$ puis $(1, 1, 1, 1)$.

(b) Donner le rang du système de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$u_1 = (1, 0, -1, 1), u_2 = (2, 1, 0, 1), u_3 = (-1, 2, 1, -2) \text{ et } u_4 = (1, -1, 1, 1).$$

Trouver toutes les combinaisons linéaires de ces 4 vecteurs qui sont nulles.

Indications.

(a) Commençons par étudier le système homogène

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + \delta = 0 \\ \beta + 2\gamma - \delta = 0 \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bref

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est de rang 3. Il admet une infinité de solutions à 1 paramètre. Enfin, le système initial est équivalent à

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + \delta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma - \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\delta \\ \beta = -\delta \\ \gamma = \delta \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions est donc formé des quadruplets de la forme

$$\delta(2, -1, 1, 1) \quad (\delta \in \mathbb{R}).$$

(b) Le système

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + \delta = x \\ \beta + 2\gamma - \delta = y \\ -\alpha + \gamma + \delta = z \\ \alpha + \beta - 2\gamma + \delta = t \end{cases}$$

est équivalent, d'après ce qui précède, à un système avec une équation de compatibilité. On peut la trouver en appliquant le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & -1 & y \\ -1 & 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & -2 & 1 & t \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & -1 & y \\ 0 & 2 & 0 & 2 & x+z \\ 0 & -1 & -1 & 0 & t-x \end{array} \right)$$

puis

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & -1 & y \\ -1 & 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & -2 & 1 & t \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x-t \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -x+y+t \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -x+z+2t \end{array} \right)$$

et finalement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & -1 & y \\ -1 & 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & -2 & 1 & t \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x-t \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -x+y+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3x+2y+z+4t \end{array} \right).$$

Bref le système avec second membre admet des solutions si et seulement si $-3x + 2y + z + 4t = 0$. Pour $(1, 1, 1, 1)$, on a $-3 + 2 + 1 + 4 = 4 \neq 0$. Donc le système n'admet alors aucune solution.

(c) Le système de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$u_1 = (1, 0, -1, 1), u_2 = (2, 1, 0, 1), u_3 = (-1, 2, 1, -2) \text{ et } u_4 = (1, -1, 1, 1)$$

est associé (dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est donc de rang 3 d'après ce qui précède (et engendre un sous-espace vectoriel de dimension 3). Toutes les combinaisons linéaires de ces 4 vecteurs qui sont nulles sont données par les solutions du système homogène trouvé ci-dessus. Donc on a

$$\forall \delta \in \mathbb{R} \quad \delta(2u_1 - u_2 + u_3 + u_4) = 0.$$

(d) Il suffit de trouver, d'après le cours, un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui ne soit pas élément de F donc qui ne vérifie pas l'équation $-3x + 2y + z + 4t = 0$. On sait que le vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ convient (il engendre une droite supplémentaire de F) mais c'est aussi le cas de chacun des vecteurs de la base canonique.

3. **Exercice 3.** On considère l'application linéaire l de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On notera e_1 , e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Déterminer $l(e_1)$, $l(e_2)$ et $l(e_3)$.
- (b) Donner la dimension du noyau de l . En déterminer une base.
- (c) Calculer le rang de l . Donner une base de l'image de l et déterminer un système d'équation définissant ce sous-espace vectoriel.
- (d) On se donne les vecteurs

$$f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \text{ et } f_3 = 2e_2 + e_3.$$

Déterminer la matrice B de l'application l dans cette nouvelle base.

- (e) Quelles sont les valeurs propres de l ? Donner une base de chaque espace propre. L'application est-elle diagonalisable?

Indications.

- (a) D'après le cours, les vecteurs $l(e_1)$, $l(e_2)$ et $l(e_3)$ sont les vecteurs dont les coordonnées (dans la base canonique) forment les colonnes de la matrice. Donc

$$l(e_1) = -2e_2 - e_3, l(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3, l(e_3) = 2e_1 - e_3.$$

- (b) Les vecteurs éléments du noyau de l sont les vecteurs (x, y, z) tels que $l(xe_1 + ye_2 + ze_3) = 0$. Soit le système

$$\begin{cases} -y + 2z = 0 \\ -2x + y = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

soit les vecteurs de la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, 1)$. Il s'agit d'un sous-espace de dimension 1.

- (c) Par le théorème du rang, le rang de l'application linéaire l est donné par $\text{Dim}(\mathbb{R}^3) - 1 = 3 - 1 = 2$. Deux vecteurs colonne de la matrice (non colinéaires) engendrent donc l'image de l . On peut prendre $\{l(e_1), l(e_3)\}$ par exemple. La co-dimension de $\text{Im}(l)$ est 1. Donc cette image est définie par une équation. On peut appliquer le pivot à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & x \\ -2 & 1 & 0 & y \\ -1 & 1 & -1 & z \end{array} \right)$$

ou chercher les coefficients a, b, c tels que l'équation $ax + by + cz = 0$ soit satisfaite par les deux vecteurs d'une base de $\text{Im}(l)$ soit le système

$$\begin{cases} -2b - c = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2a \end{cases}$$

et l'équation $x - y + 2z = 0$.

(d) On se donne les vecteurs

$$f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \text{ et } f_3 = 2e_2 + e_3.$$

On note que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc il s'agit bien d'une base. On sait déjà que $l(f_2) = 0$ (vecteur élément du noyau). Par ailleurs

$$l(f_1) = l(e_1 + e_2) = l(e_1) + l(e_2) = -2e_2 - e_3 - e_1 + e_2 + e_3 = -e_1 - e_2 = -f_1.$$

Et

$$l(f_3) = l(2e_2 + e_3) = 2l(e_2) + l(e_3) = -2e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 2e_1 - e_3 = 2e_2 + e_3 = f_3.$$

La matrice B de l'application l dans cette nouvelle base est donnée, en colonne, par les coordonnées des images des f_i dans la base de f_i .

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) On en déduit que les valeurs propres de l sont $-1, 0$ et 1 . Chaque espace propre est une droite vectorielle. L'espace propre pour -1 (resp. 0 , resp. 1) est donné par f_1 (resp. f_2 , resp. f_3). On aurait aussi pu constater que le fait que ces 3 vecteurs étaient propres pour l pour des valeurs propres distinctes deux à deux entraînait qu'ils forment un système libre. L'application est donc diagonalisable.

On aurait pu retrouver ce dernier résultat en calculant le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -2\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

soit encore

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

(en ajoutant à la première colonne la troisième et deux fois la seconde).
D'où

$$-\lambda(-(3-\lambda)(3+\lambda)+8) = -\lambda(\lambda^2-1) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1).$$

On retrouve bien les 3 valeurs propres. On a déjà trouvé l'espace propre pour 0 (c'est le noyau). Il reste à trouver les deux autres. Or, pour -1 , il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

soit le vecteur $(1, 1, 0) = e_1 + e_2 = f_1$. Et, pour 1 , le système

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -2x = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

soit le vecteur $2e_2 + e_3 = f_3$.

Finalement nous avons montré que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.
Comme on peut le vérifier

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$