
(Un) Corrigé du contrôle 2

Lundi 2 décembre 2019

Exercice 1. On introduit l'application linéaire l de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$l(u) = (x - 2y + z, -2x + y + z, x + y - 2z)$$

où $u = (x, y, z)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

- Donner la matrice de l dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer le rang de l . Donner une base de l'image de l .
- Donner une base du noyau de l .
- Énoncer et vérifier dans ce cas particulier le théorème du rang.

Indications.

- La matrice de l'application l est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

puisque

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ -2x + y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}.$$

- On peut déterminer le rang de l en appliquant le pivot :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2. Nous aurions aussi pu remarquer que les deux premières colonnes n'étaient pas proportionnelles donc le rang était au moins 2 mais la somme des colonnes vaut 0 donc les trois vecteurs colonnes sont liés (rang inférieur donc à 2). Une base de l'image de l est donc donnée par les vecteurs $e_1 - 2e_2 + e_3$ et $-2e_1 + e_2 + e_3$.

- Nous avons vu que

$$f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0.$$

Donc

$$\text{Ker}(l) \supset \mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3).$$

Mais ces vecteurs sont les solutions du système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = y \end{cases}$$

donc ce sont les vecteurs proportionnels à $(1, 1, 1)$:

$$\text{Ker}(l) = \mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3).$$

- Le théorème du rang affirme que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Im}(l)) + \dim(\text{Ker}(l)) .$$

Ici on a bien $3 = 2 + 1$.

Exercice 2. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par le système des quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (0, 2, -2)$ et $u_4 = (3, 1, -1)$.

- Déterminer la dimension de F et donner une base de F .
- Par combien d'équations peut-on définir F ? Donner une équation ou un système d'équations définissant F dans $\mathbb{R}^3$
- Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Indications.

- On peut déterminer la dimension de F en étudiant le rang du système des vecteurs générateurs de F . Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le système de vecteurs est de rang 2 donc F est de dimension 2 . Il est par exemple engendré par les deux premiers vecteurs u_1 et u_2 .

- Le sous-espace vectoriel F est de co-dimension $1 = 3 - 2$ dans $\mathbb{R}^3$ donc il sera défini par une équation. Soit on cherche les coefficients (a, b, c) de cette équation soit on cherche les conditions sur (x, y, z) pour que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ait des solutions. Dans le premier cas, on cherche à résoudre

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$$

soit l'équation $0x + by + bz = 0$ c'est-à-dire $y + z = 0$. Dans le second

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y - x \\ 0 & 2 & z + x \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y - x \\ 0 & 0 & y + z \end{array} \right)$$

soit la condition $y + z = 0$.

- Pour trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$, il suffit, d'après le cours, de trouver un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à F donc ne vérifiant pas l'équation. Le vecteur e_3 de la base canonique convient. On a

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus \mathbb{R}e_3 .$$

Mais le vecteur e_2 conviendrait également.

Exercice 3. — Donner la dimension et une base du sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation $x - y + z - t = 0$.

- On considère le sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 2, 1)$. En donner la dimension. Donner un système d'équations définissant G .

- Déterminer les sous-espaces $G \cap H$ et $G + H$.
- Donner une base de $\mathbb{R}^4$ qui contienne une base des quatre sous-espaces H , G , $G \cap H$ et $G + H$.

Indications.

- Le sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation $x - y + z - t = 0$ est de co-dimension 1 donc il est de dimension 3. Si $u \in H$ alors $u = (x, y, z, t)$ avec (par exemple) $t = x - y + z$ soit

$$u = (x, y, z, t) = (x, y, z, x - y + z) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 1).$$

Donc les vecteurs $e_1 + e_4$, $e_2 - e_4$ et $e_3 + e_4$ forment une base de H .

- Soit le sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 2, 1)$. Cherchons le rang du système associé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est de rang 2. Donc la dimension de G est 2. On trouve un système d'équations définissant G en étudiant le système non homogène :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & 2 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+x \\ 0 & 2 & 2 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & 0 & z-2y-2x \\ 0 & 0 & 0 & t-y-x \end{array} \right).$$

Le système d'équation

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x + y - t = 0 \end{cases}$$

définit donc G . Mais on pourrait également prendre

$$\begin{cases} 2t = z \\ x + y = t \end{cases}.$$

- Le sous-espace $G \cap H$ est formé des vecteurs qui satisfont l'équation de H et celles définissant G soit

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ x + y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + y \\ z = 2x + 2y \\ x - y + 2x + 2y - x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + y \\ z = 2x + 2y \\ 2x = 0 \end{cases}$$

Bref

$$(x, y, z, t) \in G \cap H \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ z = 2y \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc il s'agit d'une droite engendrée par le vecteur $(0, 1, 2, 1)$. Le sous-espace $H + G$ contient strictement H puisque G n'est pas inclus dans H . Donc il doit être de dimension supérieure soit au moins 4. Donc $G + H = \mathbb{R}^4$. On vérifie alors que

$$\dim(G + H) + \dim(G \cap H) = 4 + 1 = 5 = 2 + 3 = \dim(G) + \dim(H).$$

- Soit w_1 un vecteur (non nul) de $G \cap H$ soit par exemple $w_1 = (0, 1, 2, 1) = e_2 + 2e_3 + e_4$. Complétons-le par un second vecteur de G pour obtenir une base de G . Le vecteur $w_2 = v_1 = e_1 - e_2$ convient puisqu'il n'est pas colinéaire à w_1 . Comme w_2 n'appartient pas à H il engendre une droite supplémentaire à H . Il reste à choisir deux vecteurs générateurs de H qui complètent w_1 en une base de H . Prenons déjà $w_3 = e_1 + e_2$. Il n'appartient pas à G (il n'est pas colinéaire à w_1 ou ne vérifie pas les équations de G). Ajoutons $w_4 = e_2 - e_4$ et vérifions que notre système est libre :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il suffirait en fait de vérifier que $\{w_1, w_3, w_4\}$ sont libres et forment une base de H .

Finalement w_1 est une base de $G \cap H$, $\{w_1, w_2\}$ est une base de G , $\{w_1, w_3, w_4\}$ est une base de H et $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4 = H + G$. On remarquera que H et G ne sont pas en somme directe.

On a encore

$$G \cap H = \mathbb{R}w_1, \quad G = \mathbb{R}w_1 \oplus \mathbb{R}w_2, \quad H = \mathbb{R}w_1 \oplus \mathbb{R}w_3 \oplus \mathbb{R}w_4 \text{ et } \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}w_1 \oplus \mathbb{R}w_2 \oplus \mathbb{R}w_3 \oplus \mathbb{R}w_4.$$

Bref ces quatre vecteurs permettent d'engendrer tous les sous-espaces vectoriels étudiés (en les combinant judicieusement).