Université Paris Diderot Paris 7
Licence L2 (S3)
2019-2020

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires III
MI3

(Un) Corrigé du contrôle 1

Lundi 14 octobre 2019

Une coquille s'était glissée dans l'énoncé dans la donnée du développement limité du logarithme (toutes mes excuses). On rappelle donc que

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}h^n}{n} + h^n\epsilon(h)$$

si h tend vers 0 et où $\epsilon(h)$ est une fonction tendant vers 0 si h tend vers 0 .

Exercice 1. Quel est le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre n en 0 ?

Indications. D'après le cours, on peut composer deux développements limités. Dans ce cas précis, cela revient à substituer à la variable h la variable $-x$ soit

$$\ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n} + (-x)^n\epsilon(-x)$$

soit

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} + x^n\eta(x)$$

où $\eta(x)$ est une fonction tendant vers 0 si x tend vers 0 . Formellement on a $\eta(x) = (-1)^{n+1}\epsilon(-x)$.

Exercice 2. Donner un développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) .$$

Déterminer l'entier naturel a pour que

$$\frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{x^2}{3}}{x^a}$$

ait une limite finie non nulle. Déterminer cette limite finie.

Indications. D'après ce qui précède,

$$\ln(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} + h^3\epsilon(h)$$

où l'on peut substituer la valeur $h = \frac{x^2}{3}$. Soit

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{18} - \frac{x^6}{81} + x^6\epsilon(x) .$$

En particulier

$$\frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{x^2}{3}}{h^a} = \frac{-\frac{x^4}{18} - \frac{x^6}{81} + x^6\epsilon(x)}{x^a} .$$

Si $a = 4$, on a donc

$$\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{x^2}{3}}{x^4} = -\frac{1}{18} + \epsilon(x)$$

soit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{x^2}{3}}{x^4} = -\frac{1}{18} \ .$$

Exercice 3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$\ln(\cos(x)) \ .$$

En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))+\frac{x^2}{2}}{x^4} \ .$$

Indications. Nous devons donc composer le développement limité de $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 4 avec celui de ln en $\cos(0) = 1$ (toujours à l'ordre 4). D'où

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)\right) = \ln(1-H)$$

où $H = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$. On remarque que H est d'ordre 2 en h . Il nous suffira de prendre le développement limité du logarithme à l'ordre 2 . Soit

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)\right)^2}{2} + H^2\epsilon(H)$$

puis

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + x^4\epsilon(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\epsilon(x) \ .$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))+\frac{x^2}{2}}{x^4} = -\frac{1}{12} \ .$$

Exercice 4. — Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$\sqrt{1-x+x^2} \ .$$

— Montrer que la courbe $\sqrt{1-x+x^2}$ admet une asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ et la déterminer. Donner la position de la courbe vis à vis de cette asymptote.

— Que se passe-t-il pour cette courbe lorsque x tend vers $-\infty$?

Indications.

— On sait que

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)h^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)h^3}{3!} + h^3\epsilon(h)$$

soit

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + h^3\epsilon(h) \ .$$

On en déduit que

$$\sqrt{1-x+x^2} = 1 + \frac{-x+x^2}{2} - \frac{(-x+x^2)^2}{8} + \frac{(-x+x^2)^3}{16} + x^3\epsilon(x)$$

soit

$$\sqrt{1-x+x^2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2(1-x)^2}{8} - \frac{x^3(1-x)^3}{16} + x^3\epsilon(x) \ .$$

En ne conservant que les termes significatifs (d'ordre au plus 3), on obtient

$$\sqrt{1-x+x^2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon(x)$$

soit

$$\sqrt{1-x+x^2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{3x^3}{16} + x^3\epsilon(x) \ .$$

— Posons $h = \frac{1}{x}$. Alors

$$\sqrt{1-x+x^2} = x\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} = x\sqrt{1-h+h^2} \ .$$

D'après ce qui précède

$$\sqrt{1-x+x^2} = x\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8} + \frac{3h^3}{16} + h^3\epsilon(h)\right) = x - \frac{1}{2} + \frac{3h}{8} + h\epsilon(h) \ .$$

Donc la courbe admet une droite asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$. De plus

$$\sqrt{1-x+x^2} - x + \frac{1}{2} = h\left(\frac{3}{8} + \epsilon(h)\right)$$

donc est positif si $h > 0$. La courbe est donc située au dessus de son asymptote.

— Si x tend vers $-\infty$, on a

$$\sqrt{1-x+x^2} = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} = (-x)\sqrt{1-h+h^2} \ .$$

Donc

$$\sqrt{1-x+x^2} = -x + \frac{1}{2} - \frac{3h}{8} + h\epsilon(h) \ .$$

Donc la droite asymptote est $y = -x + \frac{1}{2}$. Comme h est cette fois négatif, la courbe reste située au dessus de son asymtpote.