EXAMEN MI3 - 18 JUIN 2012, DE 15H30 à 18H30

Tous documents et équipements électroniques (calculatrices, téléphones, etc) sont interdits.

Exercice 1. Pour les suites u_n définies ci-dessous, déterminer

- (1) La nature de la série $\sum u_n$.
- (2) Le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
- (3) Le rayon de convergence des séries entières $\sum u_n n! x^n$, $\sum (u_n/n!) x^n$.

$$u_n = \frac{(n+2)^4}{4^{n+2}} \quad u_n = n^n (\sqrt{3n})^3 \quad u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \log n}$$

Exercice 2. Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Trouver une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = T$.
- (2) Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- (3) En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0. Déterminer leur développement en série entière et les rayons de convergence correspondant.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x - 47}{x^2 + x - 20} \quad g(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2(x+1)}$$

Exercice 5. Montrer que la fonction suivante est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + \frac{x}{n})}{n+3}$$

Exercice 6. Donner le développement en série entière en 0 (incluant le rayon de convergence) des fonctions e^x et $\sin(x)$.

Exercice 7. Diagonaliser la matrice A suivante, c'est-à-dire déterminer deux matrices P et D telles que D soit diagonale et $D = P^{-1}AP$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 32 & 17 & -16 \\ 44 & 22 & -21 \end{pmatrix}$$