

EXAMEN MI3 - 17 JANVIER 2012, DE 12H à 15H

Tous documents et équipements électroniques (calculatrices, téléphones, etc) sont interdits.

**Exercice 1.** Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0. Déterminer leur développement en série entière et les rayons de convergence correspondant.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - x - 2} \quad g(x) = \frac{x^2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$$

**Exercice 2.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) Trouver une matrice triangulaire supérieure  $T$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $P^{-1}AP = T$ .
- (2) Calculer  $T^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (3) En déduire une expression de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 3.** Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 5 & -4 \\ -5 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.** La matrice  $A$  suivante est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? Déterminer une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  est diagonale si possible, triangulaire sinon.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.** (1) Quelle est la nature de la série de terme général suivant ?

$$u_n = \sin \left( \frac{2^n}{(-1)^n n! + n^n} \right)$$

- (2) Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum u_n x^n$  ?
- (3) Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum n! u_n x^n$  ?