Université Paris 7 Denis Diderot
L2MI3 Analyse et Algèbre Fondamentales
2010-2011

Contrôle de connaissance
du lundi 8 novembre 2010 (Durée 2 h)
Documents autorisés : notes de cours/TD
(*les trois exercices sont indépendents*)

Exercice 1 Pour tout nombre réel $p \geqslant 0$, soit S_p la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^p} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

On désigne par R_p le rayon de convergence de la série S_p. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} z^n/n^p$ soit convergente, on désigne par $S_p(z)$ la somme de cette série.

1) Calculer la valeur de R_p.
2) Calculer $S_0(z)$.
3) Calculer $S_1(x)$ pour $x \in]-R_1, R_1[$.
4) Pour quelles valeurs de p la somme $S_p(1)$ est bien définie ?
5) Montrer que, pour tout $p > 0$, la série S_p est convergente sur

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant 1,\ z \neq 1\}.$$

   Cette convergence est-elle uniforme ?
6) Montrer que, pour tout $p > 0$, la fonction $S_p : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est continue.

Exercice 2 Soit

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

une série entière dont le rayon de convergence est 1, où $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout n. Pour tout $x \in]-1, 1[$, soit $f(x)$ la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. On suppose que $f(x)$ converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers 1.

1) Montrer que, si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente, alors sa limite est ℓ.
2) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ n'est pas nécessairement convergente en construisant un contre-exemple.
3) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on a

$$|x^n - 1| \leqslant n(1 - x).$$

4) Dans la suite, on suppose

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

   Pour tout entier $N \geqslant 1$, soient

$$A_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x^n - 1), \quad B_N(x) = \sum_{n>N} a_n x^n \qquad (x \in [0, 1[).$$

TSVP

(i) Montrer que

$$|A_N(x)| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N} |na_n|.$$

(ii) Montrer que

$$|B_N(x)| \leqslant \frac{1}{N(1-x)} \sup_{n>N} |na_n|.$$

(iii) En déduire que

$$\lim_{N\to\infty} \left| f(1-1/N) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| = 0$$

(iv) En déduire que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge vers ℓ.

Exercice 3 Dans cet exercice, on étude la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^4) + \sin(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2) Montrer que la fonction f est continue en 0.
3) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
4) Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
5) Déterminer la série de Taylor $S(f)$ de f en $x = 0$.
6) Déterminer le rayon de convergence de $S(f)$.
7) Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que la série $S(f)$ converge en t vers $f(t)$.