Université Paris Diderot-Paris VII
Département de Sciences Exactes, Licence 2

Algèbre et analyse fondamentales - MA3/MI3
Année 2009-2010, 1[er] semestre

# Interrogation n°3

## Déterminants et réduction des endomorphismes

Le 16 décembre 2009

Durée 1 heure.

*Les notes de cours et de TD et les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables (même utilisés comme montre).*

**Exercice 1 (Déterminant)** Calculer, en mettant en évidence la factorisation, le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}.$$

**Exercice 2 (Diagonalisation)** Soit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice $A$, en donnant la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

**Exercice 3 (Trigonalisation)** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f$ est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur propre non-nul de cet espace propre.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre $w$ associé à la valeur propre 2. Montrer que $(u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice $T$ de $f$ dans la base $(u, v, w)$. Calculer $f^k(v)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire $T^k$.
5. Calculer $A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{matrix} -x & 1 & 2 \\ -2 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 2-x \end{matrix}$$

$(x^2+4-4x)(x-1)$

$x^3 - x^2 + 4x - 4 - 4x^2 + 4x$

$= x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

$(2-x)(x^2-3x+2)$

$(5-x)(-x)$

$-5x + x^2$

$-(5-x)(2)$

$-(10-2x)$

$2x-10$

$-x(3-x) - [-2]$

$+2$

$-3x + x^2 + 2 \quad x^2 - 3x + 2$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$

$= \boxed{2} \quad \boxed{1}$

$-x \begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ -3 & -x \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -x \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5-x & 2 \end{vmatrix}$

$-x(x^2-5x+6) + 2(-3x+6) + 2(\cancel{6}\,2x-4)$

$= -x(x^2-5x+6) \cancel{+} - 6x + 12 + 4x - 8$

$= -x^3 + 5x^2 - 6x - 2x + 4$

$= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

$\cancel{+8 + 20 + 8 - 4}$

$G_2 = A = AX$

$\cancel{AX = 2X}$

$A - 2X$

$A\,\mathrm{Id} - 2X$

$\cancel{AX}$

$(A-2X)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$-8 + 20 - 16 + 4 \quad -4 + 4$

$20 - 24 + 4$

$3 - 3z + 2z = -2z + 2z = 0$