Université Paris Diderot-Paris VII
Département de Sciences Exactes, Licence 2

Algèbre et analyse fondamentales - MA3/MI3
Année 2009-2010, 1er semestre

Correction de l'interrogation n°3

Déterminants et réduction des endomorphismes

Le 16 décembre 2009

Durée 1 heure.

Exercice 1 (Déterminant) *Calculer, en mettant en évidence la factorisation, le déterminant suivant :*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}.$$

Sachant que $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ et qu'un déterminant ne change pas en remplaçant une colonne (resp., ligne) par une combinaison linéaire des autres colonnes (resp., lignes), on a :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & 2\cos^2 a - 1 \\ 1 & \cos b & 2\cos^2 b - 1 \\ 1 & \cos c & 2\cos^2 c - 1 \end{vmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cos a & 2\cos^2 a \\ 1 & \cos b & 2\cos^2 b \\ 1 & \cos c & 2\cos^2 c \end{vmatrix}}^{C_3:=C_3+C_1} = 2\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos^2 a \\ 1 & \cos b & \cos^2 b \\ 1 & \cos c & \cos^2 c \end{vmatrix}}^{\text{Van Der monde}}$$

$$= 2\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos b - \cos a & \cos^2 b - \cos b\cos a \\ 1 & \cos c - \cos a & \cos^2 c - \cos c\cos a \end{vmatrix}}^{C_2:=C_2-\cos a\times C_1 \text{ et } C_3:=C_3-\cos a\times C_2} = 2\begin{vmatrix} \cos b - \cos a & \cos^2 b - \cos b\cos a \\ \cos c - \cos a & \cos^2 c - \cos c\cos a \end{vmatrix}$$

$$= 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)\begin{vmatrix} 1 & \cos b \\ 1 & \cos c \end{vmatrix} = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b).$$

Exercice 2 (Diagonalisation) *Soit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice A, en donnant la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A.

$$P_A(X) = \det(A - X.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} -X & 3 & 2 \\ -2 & 5-X & 2 \\ 2 & -3 & -X \end{vmatrix} = -X\Big[-(5-X)X + 6\Big] + 2(-3X+6) + 2\Big[6 - 2(5-X)\Big]$$

$$= -X(X^2 - 5X + 6) - 6X + 12 + 12 - 20 + 4X = -X(X-2)(X-3) - 2X + 4$$

$$= -X(X-2)(X-3) - 2(X-2) = (X-2)\Big[-X(X-3) - 2\Big] = (X-2)(-X^2 + 3X - 2)$$

$$= -(X-1)(X-2)^2.$$

Le polynôme caractéristique de A a une racine simple 1 et une racine double 2. La matrice A est diagonalisable si l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2.

L'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1, qui est par définition $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = X\}$, s'obtient en résolvant $AX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+3y+2z & = & 0 \\ -2x+4y+2z & = & 0 \\ 2x-3y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi, E_1 est de dimension 1 et est engendré par le vecteur propre $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 , qui est par définition $E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 2X\}$, s'obtient en résolvant $AX = 2X$, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+3y+2z & = & 0 \\ -2x+3y+2z & = & 0 \\ 2x-3y-2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ces trois équations se ramènent à $2x - 3y - 2z = 0$, qui est l'équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, E_2 est de dimension 2, et une base est donnée par les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme E_2 est de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre 2, la matrice A est diagonalisable. Par conséquent, $A = P.D.P^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1,2,2)$ et la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteuérs propres (u, v, w) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (Trigonalisation) *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que f est trigonalisable.*
   Calculons le polynôme caractéristique de f.

$$P_f(X) = \det(B - X.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\Big[(2-X)(1-X)+1\Big] + 1 - (2-X)$$
$$= (1-X)(X^2-3X+3) + X - 1 = (1-X)\Big[X^2-3X+3-1\Big] = (1-X)(X^2-3X+2)$$
$$= (1-X)(X-1)(X-2) = (2-X)(1-X)^2.$$

   Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, toutes les trois racines de P_f sont réelles. L'endomorphisme f est donc trigonalisable.

2. *Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1,1,0)$ est un vecteur propre non-nul de cet espace propre.*
   L'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1, qui est par définition $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid BX = X\}$, s'obtient en résolvant $BX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x = y$ et $z = 0$. Ainsi, E_1 est de dimension 1. Le vecteur $u = (1, 1, 0)$ un vecteur propre de E_1 car ses première et deuxième coordonnées sont égales et sa troisième coordonnée est nul. Le vecteur u engendre donc la droite vectorielle E_1.

Remarquons que l'endomorphisme f, qui est trigonalisable, n'est pas diagonalisable car la dimension de E_1 n'est pas égale à la multiplicité de sa valeur propre associée ($\dim E_1 = 1 \neq 2$).

3. *Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.*

$$(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(v) = f(v) - v = B.v - v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u.$$

4. *Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w). Calculer $f^k(v)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k.*

L'espace propre E_2 associé à la valeur propre 2, qui est par définition $E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid BX = 2X\}$, s'obtient en résolvant $BX = 2X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -x + z & = & 0 \\ -x + z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $x = z$ et $y = 0$. Ainsi, E_2 est de dimension 1 et est engendré par le vecteur propre $w = (1, 0, 1)$. Pour montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la famille (u, v, w) est libre, c'est-à-dire, que le système $au + bv + cw = 0$ implique que $a = b = c = 0$. Nous pouvons aussi montrer que $\det_{can}(u, v, w) \neq 0$. En effet, $\det_{can}(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, la famille (u, v, w) est donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$, et est donc une base.

Comme $f(u) = u$, $f(v) = u + v$ et $f(w) = 2w$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w) est $T = P^{-1}.A.P$, où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $f(v) = u + v$, $f^2(v) = f(f(v)) = f(u + v) = f(u) + f(v) = u + u + v = 2u + v$. Aussi, $f^3(v) = f(f^2(v)) = f(2u + v) = 2f(u) + f(v) = 2u + u + v = 3u + v$. Une récurrence facile permet de montrer que $f^k(v) = k.u + v$. Vu que T^k est la matrice de l'endomorphisme f^k dans la base (u, v, w), et comme $f^k(u) = u$, $f^k(w) = 2^k.w$, la matrice T^k est $T^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

5. *Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

$A = P.T.P^{-1}$, donc $A^k = (P.T.P^{-1})^k = PT^kP^{-1}$. Calculons P^{-1}. Comme $u = e_1 + e_2$, $v = e_3$ et $w = e_1 + e_3$, alors $e_1 = w - e_3 = w - v$ et $e_2 = u - e_2 = u + v - w$. D'où, la matrice de passade de la base (u, v, w) à la base canonique est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où,

$$A^k = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{P} . \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}}^{T^k} . \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}^{P^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & k & 2^k \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^k - k & 1 + k - 2^k & k \\ -k & 1 + k & k \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{pmatrix}.$$