

Interrogation n°2

Séries numériques

Le 28 octobre 2009

Durée 45 minutes

Les notes de cours et de TD et les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables (même utilisés comme montre). Toutes les réponses devront être justifiées.

La question 3 de l'exercice 2 sera noté hors barème.

Exercice 1 Étudier la nature des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n \geq 1} \frac{n + \ln n}{n^2 + 1}; \quad (2) \sum_{n \geq 0} n^7 e^{-\sqrt{n}}; \quad (3) \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!}; \quad (4) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{3n}{4n-1} \right)^{2n}; \quad (5) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n \sqrt{n}}.$$

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - 1$.

1. Donner un équivalent de u_n et de $|u_n|$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Étudier la convergence absolue puis la convergence de la série de terme général u_n .
3. Faire de même avec la suite $v_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.