Université Paris Diderot-Paris VII
Département de Sciences Exactes, Licence 2

Algèbre et analyse fondamentales - MA3/MI3
Année 2009-2010, 1^{er} semestre

Correction de l'interrogation n°2

Séries numériques

Le 28 octobre 2009
Durée 45 minutes

Exercice 1 *Étudier la nature des séries suivantes :*

$$(1) \sum_{n\geqslant 1} \frac{n+\ln n}{n^2+1}; \qquad (2) \sum_{n\geqslant 0} n^7 e^{-\sqrt{n}}; \qquad (3) \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!}; \qquad (4) \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n}; \qquad (5) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n\sqrt{n}}.$$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{n+\ln n}{n^2+1} \geqslant \frac{n}{n^2+1}$. Or $\frac{n}{n^2+1}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la série de terme général positif $\frac{n}{n^2+1}$ est aussi divergente (théorème des équivalents des séries à termes positifs). Par le théorème de comparaison des séries, la série $\sum \frac{n+\ln n}{n^2+1}$ est donc divergente.
2. $\lim_{x\to+\infty} n^2.n^7e^{-\sqrt{n}} = \lim_{x\to+\infty} n^9e^{-\sqrt{n}} = 0$. La suite de terme général positif $n^7e^{-\sqrt{n}}$ décroît plus vite que la suite de terme général $\frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (car série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), la série $\sum n^7e^{-\sqrt{n}}$ est convergente.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\Big((n+1)!\Big)^3}{\Big(3(n+1)\Big)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{\Big((n+1)n!\Big)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$
$$= \frac{(n+1)^3(n!)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{27} < 1$. D'après le critère de d'Alembert pour les séries, la série à termes positifs $\sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ est convergente.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n} > 0$. Comme $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n}} = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{\frac{2n}{n}} = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^2$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{9}{16} < 1$. D'après le critère de Cauchy pour les séries, la série $\sum \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n}$ est donc convergente.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^n\sqrt{n}} \overset{\leqslant}{\geqslant} \frac{1}{2^n}$. Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $r = \frac{1}{2} < 1$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{2^n\sqrt{n}}$ est donc convergente.

La nature de cette série peut aussi être établie par le théorème d'Abel. En effet, soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par : $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. D'une part, la suite de terme général positif b_n est décroissante et tendant vers 0 à l'infini. D'autre part, la somme partielle $\sum a_n$ est bornée car a_n est une suite géométrique de raison $r < 1$. D'après le théorème d'Abel, la série $\sum a_n b_n$ est donc convergente.

Exercice 2 *Pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - 1$.*

1. *Donner un équivalent de u_n et de $|u_n|$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

   En 0, $e^x - 1$ est équivalent à x. Comme $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le terme de la suite u_n est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $|u_n|$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

2. *Étudier la convergence absolue puis la convergence de la série de terme général u_n.*

   Le théorème sur les équivalents dans les séries à termes positifs ne s'applique qu'à des suites positives. Il s'applique donc à $|u_n|$, mais pas à u_n. Comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, car c'est une série de Riemann $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, la série $\sum |u_n|$ est divergente. La série de terme général u_n n'est donc pas absolument convergente.

   Comme $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ au voisinage de 0, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{6n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
   Soient les suites (an), (b_n), (c_n) et (d_n) quatre suites définies par :

   $$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{1}{2n}, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{6n\sqrt{n}}, \quad d_n = o(n^{-\frac{3}{2}}).$$

   D'après le théorème des séries alternées, les séries $\sum a_n$ et $\sum c_n$ sont convergentes, car $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{6n\sqrt{n}}$ sont deux suites positives, décroissantes et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Le terme général de la suie (d_n) est $o(n^{-\frac{3}{2}})$. Par définition, $|d_n| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente (série de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), la série de terme général d_n est convergente car elle est absolument convergente (par le théorème de comparaison). Par contre, la série de terme général b_n est divergente. Finalement, la série $\sum u_n = \sum(a_n + b_n + c_n + d_n) = \sum(a_n + c_n + d_n) + \sum b_n$ est divergente car $\sum u_n$ est une somme d'une série convergente et d'une série divergente.

3. *Faire de même avec la suite $v_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.*

   $\sin x$ est équivalent à x en 0. Donc, v_n est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $|v_n|$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ quand n tend vers $+\infty$. La série $\sum v_n$ n'est donc pas absolument convergente.
   $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ au voisinage de 0. Donc $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{6n\sqrt{n}} + o(n^{-\frac{3}{2}})$ quand n tend vers $+\infty$. En utilisant les notations de la réponse à la question 2, $v_n = a_n - c_n + d_n$. D'après la réponse précédente, $\sum v_n = \sum(a_n - c_n + d_n)$ est donc convergente.