Université Paris Diderot-Paris VII
Département de Sciences Exactes, Licence 2

Algèbre et analyse fondamentales - MA3/MI3
Année 2009-2010, 1er semestre

Interrogation n°1

Suites numériques

Le 14 octobre 2009
Durée 40 minutes

Les notes de cours et de TD et les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables (même utilisés comme montre). La question 6 est une application de l'exercice et sera noté hors barème.

Exercice 1 (La méthode d'Héron). Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$ montrer que
$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$
6. **Question subsidiaire** : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.